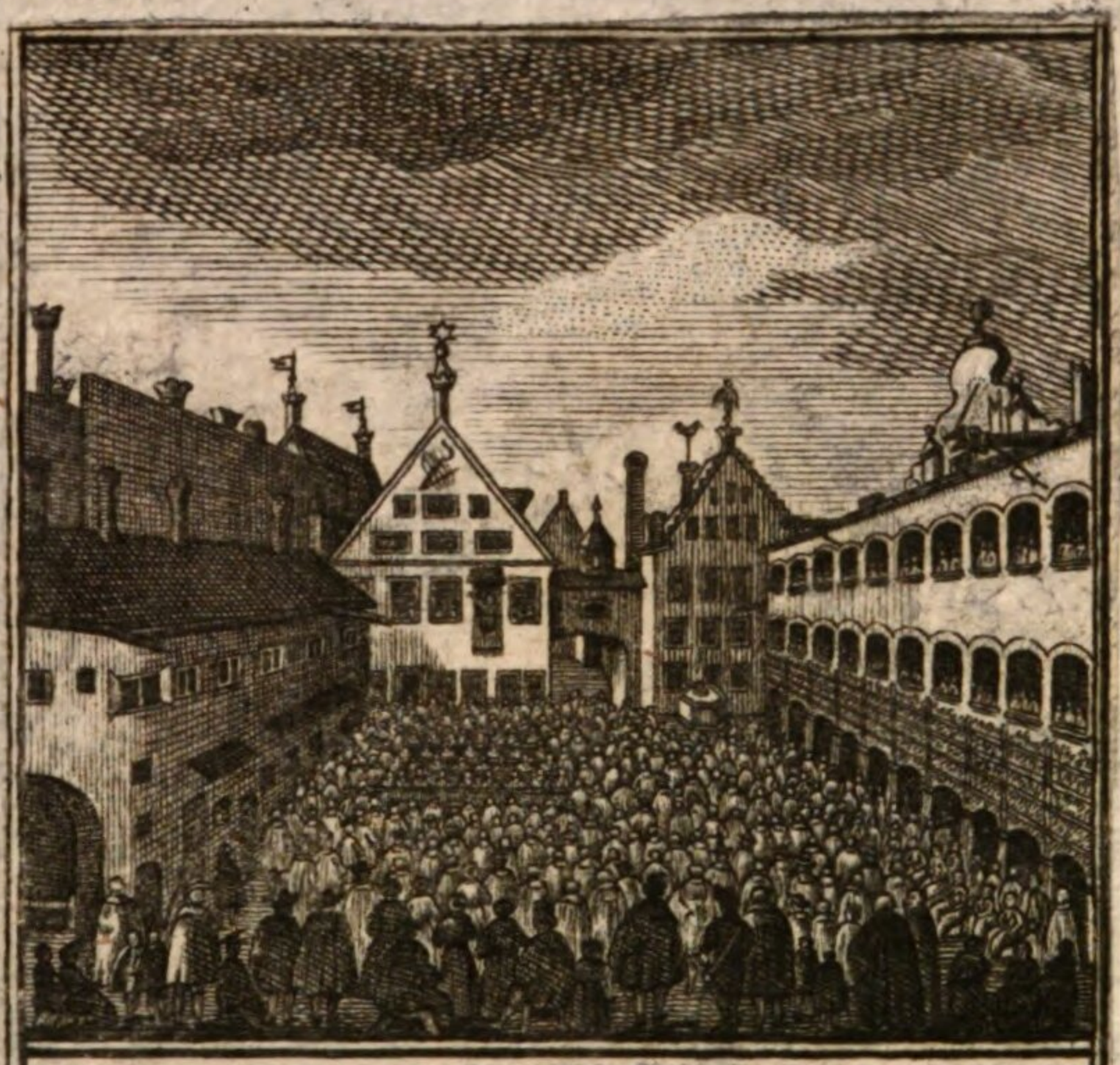
Math. 386
-1-



Ex Bibliotheca
Collegii Evangelici,
Aug. Vindel.

L. M. Steinberger Sculps. A.V.

Anfangsgründe der Arithmetik Geometrie ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv.

BIBLIOTHEK DES COLLEGIUMS ZU AUGSBURG

Abgefaßt von

Abraham Gotthelf Käſtner

der Math. und Naturl. Prof. der Kön. Geſellſch. der Wiſſ. zu Göttingen; der Kön. Schwed. und Preuſſ. Akad. der Wiſſ. der Erfurtiſchen Churf. Geſellſch. nützl. Wiſſ. des Bononiſchen Inſtituts; der Peruſiniſchen Academiae Auguſtae, Mitgliede; der Kön. Deutſchen Geſ. zu Götting. Aelteſten; der Leipziger Deutſchen Geſ. und Geſ. der freyen Künſte; der Jen. Lat. u. Deutſch. Geſ. Mitgliede.

Zweyte verbeſſerte Auflage.

Göttingen
im Verlag der Wittwe Vandenhoeck 1764.

Staatsbibliothek
zu
Berlin

Dem
Hochgebohrnen Freyherrn
Herrn
Gerlach Adolph von Münchhausen,
Königlich-Groß-Britannischen
und Chur-Braunschweig-Lüneburgischen
Hochbetrauten
würklichen Geheimen Rath
und
Cammer-Präsidenten,
wie auch
der Georg-August-Universität
Höchstansehnlichen und Höchstverdienten
Curatoren
Erbherrn auf Strausfurth ꝛc.
Meinem gnädigsten Herrn.

Hochgebohrner Freyherr
Gnädigster Herr

Ew. Hochfreyherrl. Excellenz habe durch gegenwärtiges Werk Rechenschaft abzulegen, wie ich einem Theile des mir gnädigst anvertrauten Lehramtes genug zu thun bemüht bin. Ich hoffe, die Wahrheiten, welche den Inhalt dieses Buches ausmachen, vollständiger, gründlicher und brauchbarer vorgetragen zu haben, als insgemein zu geschehen pfleget. Der gnädige und einsichtsvolle Schutz, den Ew. Hochfreyherrl. Excellenz den Wissenschaften

ten gönnen, verbindet jeden Lehrer, sich nach einem solchen Vortrage desjenigen, das ihn beschäfftiget, zu bestreben, und macht die Lernenden eifrig sich von andern durch vollkommenere Kenntnisse zu unterscheiden.

Unter den eifrigsten Wünschen für Ew. Excellenz hohes Wohlergehen verharre mit tiefster Ehrfurcht

Hochgebohrner Freyherr,
Gnädigster Herr,
Ew. Hochfreyherrl. Excellenz

Göttingen
den 3. September
1758.

unterthänigstgehorsamster
Abraham Gotthelf Kästner.

Vorrede
der ersten Auflage.

Meine Absicht ist, durch gegenwärtiges Werk etwas zu Ausbreitung einer solchen Kenntniß der Mathematik beyzutragen, die dadurch erstlich recht brauchbar wird, daß sie gründlich und vollständig ist. Wenn man die Mathematik zu Schärfung des Verstandes treiben will, so kann man sich nicht begnügen, Sätze als bewiesen anzunehmen, für die nur unzulängliche und zum Theil gar unrichtige Schlüsse vorgebracht sind; So verhält es sich in den meisten geometrischen Anfangsgründen, mit den Lehren von den Parallellinien, der Ausmessung der Körper u. d. g. Niemand aber kann in der angewandten Mathematik, und in den Künsten und Wissenschaften, wo es auf Berechnungen und Abmessungen ankömmt, die gehörige Geschicklichkeit erlangen, dem es an einer Fertigkeit in der Decimalrechnung, an verschiedenen merkwürdigen Lehren von den Verhältnissen und Proportionen, an einer Einsicht in die eigentliche Beschaffenheit und den Ursprung der Logarithmen fehlt, der von der Art, die Lagen verschiedener Ebenen gegen einander zu

bestimmen, den darauf beruhenden Beschaffenheiten der Körper, und den Kreisen auf der Kugelfläche, nicht die gehörigen Begriffe hat. Ich geschweige der Buchstabenrechnung, ohne die niemand jetzo sich ein wenig über die gemeinste Kenntniß jedes Anfängers erheben kann.

Daß die meisten Lehrlinge der Mathematik in Deutschland von allen nur genannten Dingen, bey ihrer gewöhnlichen Anführung nichts gefaßt haben, erhellet zulänglich daraus, weil das Wolfische Lehrbuch nichts davon enthält, das fast ein halbes Jahrhundert (*) beym Unterrichte in der Mathematik ist gebraucht worden, ohne von der grossen Menge neuerer Einleitungen verdrängt zu werden, die auch in der That meistens viel schlechter sind.

An diesem Buche muß man dergleichen Mängel entschuldigen, wenn man nur mittelmässige Billigkeit besitzet. Sein Verfasser suchte zuerst nach dem Anfange, den der ältere Sturm gemacht hatte, die Mathematik unter den Deutschen auszubreiten, und er durfte also von einer Wissenschaft, die dem gemeinen Haufen der deutschen Studenten und Professoren kaum

---

(*) Die erste Aufl. der Anfangsgründe kam 1710. heraus.

kaum dem Nahmen nach bekannt war, nur wenig, und nur das leichteste vortragen. Denn die meisten deutschen Gelehrten, und vorzüglich diejenigen, nach deren Rathe junge Leute ihren akademischen Fleiß einrichten sollen, waren berühmter wegen ihrer Arbeitsamkeit, Folianten aus Folianten zusammenzuschreiben, als wegen der Aufmerksamkeit, eine kurze Reihe vernünftiger Schlüsse im Zusammenhange zu überdenken.

Deutschland wird den Freyherrn von Wolf noch mit Hochachtung nennen, wenn die Nahmen der meisten seiner Verächter nur noch in den Insectenverzeichnissen dauren werden, die der Fleiß deutscher Litteratoren sammlet. Es hat ihm für die Ausbreitung der Vernunft, und der Mathematik, die einen so grossen Theil der Vernunft ausmacht, sehr vieles zu danken. Man verfährt also ohne Zweifel selbst seinen Absichten gemäß, wenn man sich des durch ihn allgemeiner gemachten Geschmackes an der Mathematik bedienet, ihre Anfangsgründe vollkommener zu lehren, als er es wagen wolte, und Lehrlinge so weit zu führen, daß sie ihre Kenntniß durch eigenen Fleiß erweitern und anwenden können. Ich halte es für meine Schuldigkeit, einigermassen anzuzeigen, wie ich dieses

ses hier zu bewerkstelligen gesucht habe. Man wird mir diese Erzählung nicht als eine Eitelkeit anrechnen. Sie soll nur zu meiner Rechtfertigung dienen, warum ich die Menge der mathematischen Einleitungen vermehre, nachdem ich bey meinen Vorlesungen zwanzig Jahre lang das Wolfische Handbuch gebraucht habe. Ich kann Kennern der Wissenschaft nicht zumuthen, daß sie diese Anfangsgründe durchlesen sollen, um etwa die Stellen zu finden, denen ich ihren Beyfall wünschte.

Alle Begriffe der Arithmetik gründen sich meines Erachtens auf die von ganzen Zahlen; Brüche sind ganze Zahlen, deren Einheit ein Stück des anfangs für die Einheit angenommenen Ganzen ist, und Irrationalgrössen muß man sich als Brüche vorstellen, da diese Einheit veränderlich, immer ein kleineres und kleineres Stück des Ganzen ist. Daß der Freyh. v. Wolf die Lehre von den Brüchen auf die von den Verhältnissen gründet, ist ein grosser Fehler wieder die Methode, weil die größte Menge der Verhältnisse, Brüche zu Exponenten hat. Daher habe ich im I. Cap. der Arithmetik alles aus den Begriffen ganzer Zahlen herzuleiten gesucht; und dabey sorgfältig gewiesen, wie hieraus Sätze folgen, die

bey ganzen Zahlen augenscheinlich sind, und auch von Schriftstellern, die scharf erweisen, meiner Einsicht nach ohne zulängliche Rechtfertigung allgemein angenommen werden (*). So, glaube ich, lassen sich die arithmetischen Lehren mit völliger Schärfe und Allgemeinheit, und doch dabey leichte darthun, wenn man sie nicht von mehr abstracten Begriffen anfängt als die Noth erfordert. Die Lehre von den entgegengesetzten Grössen und die Buchstabenrechnung, ist jedem unentbehrlich, der ohne allzugrosse Weitläuftigkeit, die nothwendigsten Lehren einsehen, und in den Stand kommen will, sich selbst einigermassen zu helfen. Wie ich sie hier vortrage, haben sie nichts Geheimnißvolles, und werden keinen Anfänger erschrecken. Sollte ja einer so furchtsam seyn, so will ich ihm zehn bis zwölf Octavbände und Quartanten weisen, deren Verfasser auf verschiedenen Universitäten Deutschlandes wegen der darinnen angebrachten Buchstabenrechnungen für tiefsinnige Mathematiker, ja gar für Algebraisten, gehalten werden, und ich will ihn auf meine Ehre versichern, daß ihn ein halbes Jahr in den Stand setzen soll, eben so tiefsinnige Werke zu schreiben, wenn er einen mittel-

(*) Ar. I. E. 82. u. f. H. IIII. E. 51. §.

telmässigen Fleiß nur bey so vielem Verstande und so vieler Aufmerksamkeit anwenden will, als ein Frauenzimmer braucht das Taroc spielet.

Die Zusammensetzung der Verhältnisse wird hoffentlich im Anfange des VI. C. so erklärt seyn, daß man diese Vorstellung sehr natürlich finden, und den Ursprung der Logarithmen leicht einsehen wird. Bey der allgemeinen Erklärung der Verhältniß ist noch einige Dunkelheit, wenn man auch die Irrationalverhältniß unter sie bringen will. Die Art, wie ich die Begriffe von Irrationalzahlen, aus den von Rationalzahlen hergeleitet habe, wird vielleicht auch deutlicher machen, wie man sich jene Verhältnisse durch die Vergleichung mit Rationalverhältnissen vorstellen soll (*).

Die Geometrie würde kein Vorbild der vollkommensten Lehrart bleiben, wenn man sich verstatten wollte, Sätze, deren Wahrheit nicht augenscheinlich ist, in ihr unbewiesen anzunehmen. Dieserwegen bin ich im Erweisen so weit gegangen, als nur kann gefodert werden, wo von der Zusatz des 8. Grundsatz eine Probe seyn kann. Die Schwierigkeit, welche sich bey der Lehre von den Parallellinien findet, hat mich schon seit vielen Jahren beschäftiget. Ich

glaubte,

(*) Ar. V. C. 23. 27. §.

glaubte, sie wäre in Hausens Elementis Matheseos (†) völlig gehoben. Der vormahlige Prediger bey der französischen Gemeinde zu Leipzig Mr. Coste benahm mir diese Zufriedenheit, als er mir einmahl bey dem Umgange, den er mir oft gönnete, anzeigte, es sey an dem angeführten Orte von Hausen ein Schluß gemacht worden, der nicht folge. Ich entdeckte diesen Fehler bald selbst (††) und bemühte mich von der Zeit an, die Schwierigkeit selbst zu heben, oder Schriftsteller zu finden, die sie gehoben hätten, aber in beyder Absicht vergebens, ob ich gleich fast eine kleine Bibliothek von einzelnen Schriften oder Anfangsgründen der Geometrie sammlete, wo dieser Gegenstand besonders war betrachtet worden (*). Nachdem gegenwärtige Arbeit mich veranlasset hat, diese Sache von neuem zu überlegen, so habe ich kein Verfahren finden können, das meiner

Befrie-

(†) Geom. Prop. 13.
(††) Cas. I. Prop. 13. folgt nicht aus Schol. Prop. 10. n. 4.
(*) Hr. Ge. Sim. Klügel aus Hamburg hat auf mein Anrathen die gelehrte Geschichte dieses Grundsatzes mit vielem Fleisse, und guter Beurtheilung verfaßt, und solche als eine Disputation den 20. Aug. 1763. unter mir sehr geschickt vertheidigt. Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Es sind da 28erley Versuche angeführt, die alle denen welche sie angestellt, werth geschienen haben, der Welt vorgelegt zu werden.

Befriedigung näher käme, als dasjenige, das ich in den Zusätzen des 11. Satzes, und im 12. S. erwählt habe. Der 12. Satz ist der umgekehrte (conuersa) des eilften; und den 11. kann man in vollkommener Schärfe erweisen. Ich wollte also, daß die Lehrer der Logik, die von der Conversion so viel Regeln geben, uns an diesem Exempel den Nutzen ihrer hochgepriesenen Kunst zeigten; Sie würden mir und vielleicht einigen andern Leuten den Wahn benehmen, als seyen diese Regeln, wie der gröste Theil ihrer übrigen Weißheit, völlig unbrauchbar, weil man dadurch nichts findet, das nicht ein natürlicher Verstand, den die Geometrie geübt hat, ohne sie heraus brächte.

Ich habe in der theoretischen Geometrie gröstentheils Hausens Elementis Matheseos gefolgt, und die Arbeit ist mir dadurch angenehmer geworden, weil ich mich dabey des vergnügten Theiles meiner Lebenszeit erinnerte, in dem der Verfasser dieses Buches mir den Weg zu den sichersten und erhabensten Kenntnissen wiese. Von seiner Arithmetik habe ich weder den Vortrag nachahmen, noch den Inhalt völlig in gegenwärtige kurze Anfangsgründe bringen dürfen, und würde, wenn ich alle seine Lehren hätte abhandeln sollen, ver-

schie-

schiedener Allgemeinheit sorgfältiger zu erweisen gesucht haben. Sie gehören aber grossentheils in die höhere Mathematik, und man kann sie daher erst Lehrlingen der Analysis vorlegen. Er hat den Euklides auf eine geschickte Art verkürzt, und seine Beweise unterscheiden sich von den Beweisen der Alten fast nur da, wo der den Neuern gewöhnliche Ausdruck des Unendlichen die Schlüsse zusammenziehen kann. Ich habe zu zeigen gesucht, wie dieser Ausdruck nichts weiter als die Begriffe der Alten andeute (*). Euklides und Archimedes nehmen Grössen für einerley an, wenn sie beweisen können, ihr Unterschied müsse kleiner seyn, als jede Grösse, die sich angeben läßt. Mich deucht also, Herr Karsten ist in seinen sehr gründlich abgefaßten praelectionibus matheseos theoreticae elementaris gegen das Unendliche zu strenge gewesen, und es läßt sich leicht zeigen, daß solches selbst in den Beweisen versteckt liegt, aus denen er es verbannt zu haben glaubt.

Warum ich die ausübende Geometrie der theoretischen beygefügt, deßwegen wird mich der 33. S. zulänglich entschuldigen: und die gemeine Art die Figuren auszurechnen (**) ist in

(*) Geom. 22. S. 11, Zus. u. 24. S. und 41. S.
(**) Geom. 41. S.

in der That mit der, welche Hausen (†) und andere erwählet, einerley, daß ich nicht sehe, warum ich ihr eine tiefsinnigere Gestalt geben sollte.

Von der Lage der Ebenen habe ich sehr viele Sätze in einen sehr engen Raum zu bringen gesucht, ihre Wahrheit aber wird man von mir vielleicht überzeugender dargethan finden, als von andern mit grösserer Weitläuftigkeit geschehen ist, wenn man nur auf den Zusammenhang meiner Schlüsse aufmerksam genug seyn will. Die Sätze, auf welche sich die Ausmessung der Parallelepipedorum gründet, hatte Hausen ziemlich kurz zusammengezogen (*); den ersten von ihnen aber, welches bey mir der 54. Satz ist, so allgemein angenommen, daß er auch meinen 55. Satz mit dessen Zusatze mit darunter begriffe. Mir hat es nöthig geschienen, diese Schlüsse deutlicher aus einander zu setzen.

In der Trigonometrie hatten die Erinnerungen, wie sich die Zeichen der trigonometrischen Linien, mit der Art der ihnen zugehörigen Winkel ändern (††), ihre natürliche Stelle da, wo die Begriffe von diesen Linien gegeben werden, und waren mir unentbehrlich, wenn ich zeigen wollte, wie die Buchstabenrechnung hier anzuwenden ist. Meine Absicht erforderte hier nichts mehr als diese Veränderungen durch die vier.

Qua-

(†) Geom. Prop. 41. 48. (*) Geom. Prop. 77. 78. 79.
(††) Trig. 2. Erkl. 7. 8. Zus. u. s. w.

Quadranten eines Kreises zu betrachten. Ich habe sie anderswo allgemeiner angestellt (*). Bey der Berechnung der Kugeldreyecke habe ich die vorkommenden Zweydeutigkeiten alle zu entscheiden gesucht, welches sich in dieser Kürze ohne die nur erwähnten Erinnerungen von den verschiedenen Zeichen der trigonometrischen Linien nicht hätte bewerkstelligen lassen (**). Mir ist eine so vollständige Ausführung hievon nicht vorgekommen, grosse Werke, wie etwa Rhaetici opus Palalatinum ist, ausgenommen, für die aber meine Gedult nicht zureichet. Herr Prof. Heinsius in einigen 1755. zu Leipzig herausgegeben Programmatibus, und der Herr Geh. Rath v. Segner in seinen vortrefflichen Elementis Arithm. & Geom. haben dergleichen Anweisungen gegeben, von denen aber die meinige unterschieden ist.

Unter den Theilen der angewandten Mathematik, setzt die mathematische Perspectiv die wenigsten fremden oder unbekannten Gründe voraus, und ich habe sie beygefügt, um eine Probe zu geben, wie angenehme und nützliche Künste auf den geometrischen Sätzen beruhen. Eine weitläuftigere Ausführung verstatteten die Gränzen dieses Lehrbuches nicht.

Ich habe diese Arbeit meistens in dem letzten Viertheile des vorigen Jahres und im Anfange des jetzigen verfertiget. Man weiß den Zustand,

(*) In Progr. Vnde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus. Gott. 1756.

(**) Sph. Trig. 1. S. 5. u. f. Zus. und 2. S.

Vorrede der ersten Auflage.

in welchem sich damahls die hiesigen Lande befunden haben. So sehr unsere hohe Schule von den Feinden ist geschonet worden, die sich bey uns ihrer wohlgesitteten Lebensart und ihrer Neigung, Kenner, oder wenigstens Freunde der Wissenschaften zu heissen, gemäß aufgeführet haben, so mußte doch ihre Gegenwart, wenigstens bey den Gesinnungen die ich habe, die Freyheit und Munterkeit des Geistes, die zum Nachdenken erfodert wird, einigermassen schwächen. Noch nachtheiliger war meiner Arbeit auser diesem allgemeinen Schicksaale mein besonderes. Eine Person, deren Gesellschaft nächst der Untersuchung der Wahrheit das einzige Vergnügen war, das ich mir recht eifrig wünschte, und die selbst an dem letztern Vergnügen so viel Theil nahm, daß sie mir solches vergrösserte und mich in meinen Bemühungen aufmunterte, war von der Vorsicht zu andern Absichten bestimmt, als ich gehofft hatte. Ihr Beyspiel sollte mir zeigen, wie man durch eine lebendige Erkenntniß höherer Wahrheiten als die erhabenste Mathematik erfindet, die härtesten Prüfungen besiegt, durch welche Gott Seelen läutert, die er bald, im Guten bestätigten Geistern gleich machen will. Hoffentlich werden mich diese Umstände entschuldigen, wenn in gegenwärtigem Werke Kleinigkeiten bey der Verbindung und Ordnung der Sätze noch einiger Verbesserung fähig wären.

Göttingen im September 1758.

Erinne-

Erinnerung
wegen der neuen Auflage.

Da ich es ohngefähr zu einer Zeit mit dem Hrn. v. Segner und dem Hrn. Karsten gewagt habe, die Arithmetik und Geometrie, gründlicher und ausführlicher vorzutragen, als in den gewöhnlichen Handbüchern geschehen ist, und da unsere Bemühungen Beyfall gefunden haben, so muß doch die Neigung zu einer wahren und brauchbaren Kenntniß der Mathematik in Deutschland nicht so gar geringe seyn. Sich von dieser Neigung zu versichern, sie zu unterhalten und zu verstärken, das ist die angenehmste Belohnung die man für eine an sich nicht allzuergötzende Arbeit, für die Beschäfftigung mit Anfangsgründen erwarten kann.

Eben das reizte mich auch, bey dieser neuen Auflage einige Aenderungen zu machen, die ich bey dem bisherigen Gebrauche meines Buchs für dienlich befunden.

So gar weit von der Vollkommenheit, hielte ich es nicht entfernt daß es durch sehr grosse Verbesserungen zu einem ganz neuen Werke hätte müssen gemacht werden. Ich danke auch der Vorsicht, daß mich weder

Noth noch Gesinnung treibt, in Verwandlung der Geburthen meines Geistes, den Vortheil zu suchen, den Erisichthon in den Verwandlungen seiner Tochter fand

- - vbi habere suam transformia corpora sentit
Saepe pater dominis Triopeida vendit, at illa
Nunc equa, nunc ales, modo bos, modo ceruus abibat
Praebebatque auido non iusta alimenta parenti.
Met. VIII. 871.

Anfangsgründe in die schon alles gebracht war, was man nur in Anfangsgründe zu bringen wagen durfte, faßten keine starke Vermehrungen. In einem Lehrbegriffe, wo mit Willen nichts umsonst, nichts auser einer Verbindung mit andern gesetzt ist, mußte man entweder nur wenig oder alles ändern. Ich will hier das wichtigste erzählen, worinnen sich diese Ausgabe von der vorigen unterscheidet.

In der Arithmetik, ist verschiedenes von den Brüchen I; 71; 85, mehr erläutert worden, imgleichen von der Zusammensetzung der Quadrate und Würfel IIII; 3, 8, 30,

In der Geometrie das Ende des Zusatzes beym 8. Grundsatze des 12. S. II. Zus. Der Uebergang ins Verneinte durchs Unendliche. Das. 14. Zus. 20. S. 3... 7. Zus. Wie Beweise

weise von Proportionen die bey Rationalverhältnissen vollkommen überzeugend sind, auch auf Irrationalverhältnisse erstreckt werden, habe ich überall deutlicher zu zeigen gesucht 22. S. 3. Z. 11; 12; Z. 24. S. u. 1. Z. Eben so habe ich die Gründe der Kreisrechnung etwas mehr auseinander gesetzt. 41. S. 2, 3, 4, Z. Die Ausrechnung der Rechtecke und rechtwinklichten Parallelepipedorum, hatte ich auf die gewöhnliche Ausfüllung mit Quadraten und Würfeln gegründet, weil Anfänger es so am besten verstehen. Den tiefsinnigern Beweis, der zuerst auf die zusammengesetzten Verhältnisse führet, in denen diese Dinge stehen habe ich jetzo denen zu Gefallen beygefügt, die etwas weiter nachzudenken Lust haben, und in dem ersten Beweise, bey Irrationalverhältnissen der Seiten, so kurz wie er da steht, nicht die völlige Ueberzeugung finden. Hier habe ich also vielleicht ein paar Seiten angewandt eine Sache zweymahl zu beweisen. Wenn nur in keinem Lehrbuche mehr Ueberflüssiges wäre! Wer sich mit dem leichten Beweise befriediget, der kann in gegenwärtiger Ausgabe was nach den ersten vier Zeilen des 3. Z. beym 42. S. folgt, des 53. S. 13, 14, 15, Z. des 56. S. 2. Z. und

Vorrede der zweyten Auflage.

was nach der zweyten Zeile des 10. Z. beym 58. S. folgt, übergehen. Beym 63. S. 4. Z. habe ich Bernoullis Regel abgekürzte Pyramiden zu berechnen gewiesen, und noch bequemer gemacht.

In der Trigonometrie habe ich bey des 19. S. 1, 2, 3, 4, Zus. die Rechnungen etwas mehr auseinander gesetzt. Wenn ich dieses gleich Anfangs gethan hätte, so würde ich mich dadurch eines Vergnügens beraubet haben. Denn vor ein paar Jahren verlangte ein Kaufmann aus einer Stadt ohnweit Halle, diese Auseinandersetzung von mir. Er ließ seinen noch unerwachsenen Sohn, nach meinem Buche unterrichten, und der Lehrer hatte erst bey dieser Stelle Schwierigkeit gefunden. Ein Beweis daß der Innhalt meines Buches nicht so gar sehr schwer seyn muß.

Der 7. u. f. Zusätze des 19. S. stunden vorhin meist beym 10. S. an einem nicht so bequemen Orte. Kleinere Verbesserungen, Anführung einiger Schriftsteller u. d. g. zu erzählen würde zu weitläuftig seyn. Die Kupfer sind von neuem gestochen worden.

Göttingen im August 1763.

Abraham Gotthelf Kästner.

Inhalt.

Inhalt.

Vorerinnerungen 1. S.

Die Rechenkunst.

I. C. Von ganzen Zahlen, Brüchen, und entgegengesetzten Grössen. 21. S.

II. C. Die Buchstabenrechnung. 71. S.

III. C. Die Rechnung mit zehntheilichen und sechszigtheilichen Brüchen. 77. S.

IIII. C. Die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel. 88. S.

V. C. Von den Verhältnissen. 123. S.

VI. C. Von der Zusammensetzung der Verhältnisse, den Reihen und den Logarithmen. 140. S.

Die Geometrie.

Die ebene theoretische Geometrie. 156. S.

Anwendung derselben auf die ausübende Geometrie. 231. S.

Ausrechnung der Figuren. 258.

Von den Lagen der Flächen. 283.

Von den Kugelschnitten. 295.

Die

Die Möglichkeit prismatischer Körper. 303. S.
Die Ausmessung der Körper. 311.
Die ebene Trigonometrie. 348.
Von den rechtwinklichten Dreyecken. 359.
Von gleichschenklichten Dreyecken. 363.
Allgemeine Auflösung der Dreyecke. 366.
Anwendung auf die practische Geometrie. 375.
Anwendung der Buchstabenrechnung trigonometrische Lehrsätze zu finden. 376.
Die sphärische Trigonometrie. 395.
Von rechtwinklichten Dreyecken. 395.
Von schiefen. 408.
Die Perspectiv. 419.

Vorer-

Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt und ihrer Lehrart.

1. Was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, heißt eine Grösse. Diese Eigenschaft also unterscheidet Dinge, bey denen man sonst nichts unterschiedenes betrachtet, z. E. eine Menge Ducaten von einer andern, die alle einerley Gepräge und Gewichte haben.

2. Wie groß ein Ding sey, entdeckt uns entweder die unmittelbare Vorstellung, die wir von dem Dinge selbst haben, oder die Vergleichung mit einer andern bekannten Grösse. Wer eine Meile gereiset ist, hat einen Begriff von der Länge des Weges, den man so nennt, durch die Empfindung erhal-

ten; und wenn er tausend Meilen nennen höret, so stellt er sich diesen Weg tausendmahl an einander gesetzt vor.

3. Die Weite zweener Oerter von einem dritten mit einander zu vergleichen, pflegt man jede durch Meilen auszudrücken. Die Meile ist hier ein Maaß, eine Grösse, die man als bekannt ansieht, und untersucht, wie viel mahl sie in jeder der andern Grössen enthalten ist. Dieses Verfahren heißt messen. Zuweilen muß man auch angeben, was für Stücken des Maasses in dem gemessenen enthalten sind.

4. Die unmittelbare Messung erfodert nicht allemahl viel Geschicklichkeit, zumahl wenn keine grosse Schärfe verlangt wird. Jeder kann einen Weg mit Schritten ausmessen: Aber eine Grösse mit einem gegebenen Maasse zu vergleichen, ohne daß man es wirklich an sie anbringt, z. E. die Entfernung zweener Oerter zu sagen, ohne daß man unmittelbar von einem zum andern zu messen braucht, ist schwerer, und setzt Begriffe von den Grössen voraus, aus denen sich ihre Vergleichung durch Schlüsse herleiten läßt, auch wenn man sie mit den Sinnen nicht unmittelbar empfindet. Die Mathematik enthält eigentlich solche Lehren, vermittelst derer die Grössen sich durch Schlüsse vergleichen lassen; obgleich zu ihrer Anwendung auf sinnliche Grössen, auch unmittelbahre Messungen erfodert werden. Läßt sich die Weite des Mondes von der Erde angeben, so muß solches ohne Zweifel durch Schlüsse ge-

geschehen, deren Vordersätze zum Theil, aber gewiß nicht alle, Empfindungen seyn können.

5. Die Erkenntniß der Grösse; die mathematische Erkenntniß liesse sich also in eine gemeine und gelehrte abtheilen. Aber wenn diese soll angewandt werden, ist jene unentbehrlich; so wie sie durch die letztere oft vollkommener wird.

6. Die Grösse läßt sich von allen andern Eigenschaften einer Sache abgesondert betrachten; und dieses thut die reine oder abgesonderte Mathematik (Mathesis pura vel abstracta;) oder man betrachtet zugleich die andern Eigenschaften der Sachen mit, bey denen sich die Grösse befindet, wie in der angewandten (applicata.)

Eine Länge von 10 Meilen blos als eine Länge betrachtet; gehöret in die reine Mathematik; als die Entfernung zweener Oerter auf der Erde betrachtet in die angewandte.

7. Man kann die Grösse blos als eine Menge von Theilen; als ein Ganzes (Totum) betrachten; oder man kann zugleich auf die Verbindung, und Ordnung dieser Theile sehen; welche ein gewisses zusammengesetztes Ding (compositum) ausmachet. In jener Betrachtung gehöret sie für die Arithmetik, in dieser für die Geometrie.

Will man einen Klumpen Bley blos zum Gewichte gebrauchen, so ist seine Gestalt völlig gleichgültig, wenn nur kein Bley davon, und keines dazu kömmt: Aber eine Bleykugel bleibt zu dem Ge-

brauche, zu dem sie bestimmt ist, nicht mehr dienlich, wenn man aus ihr Schrot giessen wollte.

8. Das Ganze ist mit seinen Theilen einerley oder man kann ohne Abgang der Grösse, allezeit alle Theile statt des ganzen oder umgekehrt; setzen, alle Theile des zusammengesetzten aber sind mit dem zusammengesetzten nicht einerley, wenn sie nicht in der gehörigen Verbindung stehen.

9. Die Lehren der reinen Mathematik lassen sich alle zu einer von den genannten beyden Wissenschaften (7) bringen, ob man wohl der Bequemlichkeit wegen, Abtheilungen derselben mit Nahmen eigener Wissenschaften belegt hat. Die Art unbekannte Seiten oder Winkel eines Dreyecks zu berechnen, heißt die Trigonometrie, und wird nach Verschiedenheit dieser Dreyecke, in die ebene und sphärische abgetheilt. Die Buchstabenrechnung bedienet sich der Buchstaben als allgemeiner Zeichen der Zahlen; die Analysis lehret das Unbekannte finden, indem man es als bekannt ansieht, und aus seinem Verhalten gegen andere bekannte Dinge herausbringt, wie es durch solche zu bestimmen ist. Die Alten haben uns vornehmlich Muster der geometrischen Analysis hinterlassen. Die neuern haben sie erweitert, indem sie angefangen haben die Grössen allgemeiner als Zahlen zu betrachten. Daraus ist die Algebra, die Lehre von den Gleichungen, von verschiedenen Ausdrückungen einerley Grösse entstanden. Man hat diese Algebra auf

die

die **Kegelschnitte**, welche die Alten mehr geometrisch betrachtet hatten, und auf andere **krumme Linien** angewandt, und auf den Grund, daß sich stetige Grössen ohne Ende vermindern und vermehren, theilen und vervielfachen lassen, die Rechnung des Unendlichen gebauet, die sich wieder in die Differential- und Integralrechnung theilet, nachdem man aus der gegebenen Vergleichung zwischen endlichen und bestimmten Grössen, die Vergleichung zwischen den Geschwindigkeiten, mit denen sie sich ändern, oder aus der letzten Vergleichung die erste sucht. Alle diese zur Analysis gehörige Wissenschaften sind eigentlich grosse Capitel der Arithmetik oder der Geometrie, oder einer Wissenschaft, die aus beyden zusammengesetzt ist. Man begreift sie, und ihre Anwendungen unter dem Nahmen der **höhern Mathematik**. Sie setzen jemanden, der in ihnen geübt ist, in den Stand die wichtigsten Erfindungen zu verstehen, und selbst Wahrheiten zu erfinden, und ohne sie ist es nicht möglich oder doch sehr schwer, in der reinen Mathematik oder der angewandten weit zu kommen.

10. Die **angewandte Mathematik** erhält ihren Nahmen daher, daß sie jener ihre Lehren auf die wirklichen Sachen selbst anwendet. Hieher kan schon die Anwendung der allgemeinen arithmetischen Vorschriften, auf Fragen, die in der Hauswirthschaft, in Handel und Wandel u. d. g. vorkommen, gezählet werden. Wenn diese Fragen nur solche Kenntnisse verlangen, die man bey jedem

Schüler der Arithmetik voraussetzen darf, und ihre Beantwortung sich kurz fassen läßt, so können sie selbst in der Arithmetik als Exempel beygebracht werden. Ausserdem aber entstehen Anwendungen der Arithmetik, die nur für gewisse Lebensarten brauchbar sind, z. E. das Buchhalten. Von der Geometrie ist eine einfache und leichte Anwendung das Feldmessen, welches man gewisser massen selbst mit der Theorie, den Vortrag abwechselnder und angenehmer zu machen, verbinden kann. Ueberhaupt aber hat die angewandte Mathematik keine andern Gränzen als die Welt, und kann so viel Wissenschaften enthalten, so vielerley Gegenstände es gibt, bey denen sich Grössen durch Schlüsse bestimmen lassen.

11. Die gewöhnlichsten Gegenstände dieser Art sind die Kräfte der Körper; vermöge deren sie Bewegungen erregen oder hindern; das Licht, und die himmlischen Körper, von denen wir fast durch keinen Sinn als durch das Gesicht Empfindungen haben. Dieses giebt drey Theile der angewandten Mathematik; die Mechanik, Optik, Astronomie. Jeder begreift so viel unter sich, daß man ihn in neue Theile zergliedert.

12. Die Mechanik betrachtet die Körper entweder in ihrer Bewegung, da man ihr diesen Nahmen läßt, oder im Gleichgewichte, da sie die Statik heist. Das Gleichgewicht flüßiger, blos schwerer Körper wird in der Hydrostatik, ihre Bewegung in der

Hy:

Hydraulik und die Beschaffenheit elastischer flüßiger Körper in der Aerometrie abgehandelt.

13. Licht, das gerade fortgehet, das von Spiegeln zurückgesandt; in durchsichtigen Materien gebrochen wird, ist der Gegenstand der Optik; Katoptrik; Dioptrik.

14. Die Eintheilung des Raums und der Zeit auf der Erde, müssen vom Himmel erlernet werden. Jener wird in der mathematischen Geographie betrachtet, diese, wenn von einzelnen Tagen die Rede ist, in der Gnomonik; Jahre, Hunderte und Tausende von Jahren gehören in die Chronologie.

15. Man hat die Geschützkunst; die bürgerliche und die Kriegsbaukunst auch zur Mathematik gerechnet. In der That erfordern diese Künste zu ihrer Ausübung noch eine Menge solcher Kenntnisse, die nicht mathematisch sind. Der Mathematikverständige kann sich diese Kenntnisse erwerben, der Unwissende in der Mathematik aber kann mit ihnen allein, in der Ausübung dieser Künste nicht gehörig fortkommen.

16. Diese Wissenschaften pflegt man insgemein in den mathematischen Lehrbüchern abzuhandeln. Es gibt aber mehr Gegenstände, die von den Mathematikverständigen so sind untersucht worden, daß sie besondere Wissenschaften geben können. Die Musik ist vor alters als ein beträchtlicher Theil der Mathematik angesehen worden, und auch viele neuere Mathematikverständigen haben sich mit ihr

beschäftiget. Die Schiffkunst, welche den Weg eines Schiffes auf dem Meere bestimmen lehret, kann mit zur Geographie gerechnet werden; aber die Regierung des Schiffes durch den gehörigen Gebrauch seiner Theile, beruhet auf der Mechanik.

17. Die Mathematik erstreckt sich sogar weiter als auf blos sinnliche Dinge. Wahrscheinlichkeiten und Hoffnungen hat sie zu berechnen angewiesen, man befragt sie um die Dauer des menschlichen Lebens bey Leibrenten, Tontinen u. d. g. und beurtheilet nach ihren Regeln das Wachsthum eines Staates an Bürgern. Selbst Vergnügen und Schmerz würde sie sich auszumessen unterstehen, wenn ein Maas, das einerley Empfindung allen Geistern verständlich machte, hier zu entdecken wäre.

18. Wenig menschliche Verrichtungen sind, von denen nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruhete. Pflug und Wagen, alle Werkzeuge der Handwerker und Künstler sind Maschinen, von deren Beschaffenheit und Gebrauche die mathematische Kenntniß richtiger urtheilen lehret. Von allen solchen Verrichtungen ist insgemein ein Theil physisch, der andere mathematisch. Die Zeichenkunst und Perspectiv sind das mathematische der Mahlerkunst, die Eigenschaften der Farben, die Wirkungen ihrer Mischung, ihre Dauerhaftigkeit u. d. g. das physische. Daß Künstler und Handwerker keine Kenntniß von der Mathematik haben, das beweiset nicht, daß die Mathematik ihnen unnütze sey.

Man

Man kann Lehren brauchen, die man gelernt hat, ohne ihre Gründe zu wissen, ohne einmahl zu wissen, daß sie in eine Wissenschaft gehören. Aber wenn die Wissenschaft nicht wäre getrieben worden, so hätten diese Lehren, die in der Ausübung unentbehrlich sind, nicht können entdeckt werden. Der Kaufmannsjunge lernt rechnen, ohne zu wissen, daß ohngefähr vor zwey tausend Jahren ein griechisches Buch ist verfaßt worden, aus dem alle nachfolgende Zeiten die Lehren von der Verhältniß und Proportion, auf denen die Regel Detri beruhet, erlernet haben. Hätte man dieses Buch nicht gehabt, so wären diese Lehren vielleicht von einem andern scharfsinnigen Kopfe erfunden worden; aber von dem Kaufmannsjungen, dem sie doch unentbehrlich sind, gewiß nicht.

19. Vorschriften, denen man folgt, ohne ihre Gründe zu wissen, können an sich unrichtig seyn, wenn unser Lehrer nicht Einsicht oder Aufrichtigkeit genug hat: Sind sie auch richtig, so können wir bey ihrer Anwendung fehlen, weil wir ihre rechte Bedeutung und ihre Gränzen, nicht zu bestimmen wissen; und endlich wird es uns allezeit schwerer, wenn wir sie blos im Gedächtnisse behalten sollen, als wenn wir die Verbindung mit ihren Gründen durch den Verstand einsehen. Die Rechenkunst kann hier wieder Exempel geben.

20. Oft macht sich ein Künstler mathematische Regeln von seinen Beschäfftigungen, die ihm seine

Aufmerksamkeit lehret, ob er gleich ihren Zusammenhang mit allgemeinern Gründen nicht einsieht. Das Gefühl lehret den Fechter die Stärke und Schwäche des Degens, und die Regeln des Lagers, wenn er auch nichts vom vecte heterodromo und centro grauitatis gehöret hat. Auf diese Art erfindet man sich eine Mathematik zu seinem Gebrauche, die aber nur in die engen Gränzen dieses besondern Gebrauches eingeschränkt ist. Da alle Menschen, die nicht Schlafmützen sind, dieses ohne Unterricht thun, so besitzt die menschliche Seele ohnstreitig ein Vermögen, mathemathische Wahrheiten aus sich selbst zu entwickeln, wenn Neigung und Umstände sie darauf führen. Man kann es die natürliche Mathematik nennen.

21. Hoffentlich braucht es keinen weitläuftigen Beweis, daß eine Wissenschaft, oder vielmehr eine Sammlung von Wissenschaften nützlich sey, deren Verbindung mit allen menschlichen Beschäfftigungen so offenbahr ist. Einem Gelehrten ist es am allerwenigsten anständig, in ihr ganz unwissend zu seyn, wenn er nicht die Beschämung haben will, von Dingen, die ohne Zweifel für die Menschen wichtig sind, eben so schlechte Begriffe zu haben als der Pöbel. Die Art, wie man auf hohen Schulen die Mathematik vorzutragen gewohnt ist, kann, wenn der Lehrer die gehörigen Geschicklichkeiten besitzet, Studirenden wenigstens die ersten Begriffe von den vielfältigen Kenntnissen, welche die Mathematik enthält, und ihrer mannigfaltigen Anwendung geben,

und wenn sie besonders in der reinen Mathematik eine gründliche Einsicht, und in der Algebra einige Fertigkeit erlanget haben, so werden sie im Stande seyn, diejenigen Untersuchungen, die vorzüglich ihren Absichten gemäß sind, durch Lesen und Nachdenken selbst weiter zu treiben, oder durch besondern Unterricht darinnen, nützlicher zu gebrauchen. Der eigene Fleiß wird bey allen Theilen der Gelehrsamkeit erfodert. Die Mathematik aber läßt sich in den Stunden, die man auf Anhörung ihrer Lehren zu wenden pflegt, desto weniger vollkommen erlernen, da dieser Stunden in Vergleichung mit der Menge der Sachen viel zu wenig sind.

22. Verschiedene Schriftsteller haben den Nutzen umständlicher gewiesen, den die Gottesgelehrten, die Rechtsgelehrten, die Arzneyverständigen, und andere Gattungen von Gelehrten von der Mathematik haben können.

23. Man hat noch einen Grund, weswegen die Mathematik einem Gelehrten angepriesen wird. Ohne Absicht auf den Gebrauch ihrer Wahrheiten selbst, behauptet man, daß schon die Art, wie dieselben vorgetragen werden, seiner Aufmerksamkeit, und wo möglich seiner Nachahmung in der Wissenschaft, mit welcher er sich vornehmlich beschäfftiget, würdig sey. Die mathematische Methode nähmlich soll die einzige seyn die zur Gewißheit führet, und der man sich also zu bedienen hat, wenn man vor Irrthümern sicher seyn will. Diese Unter-

tersuchung gehört eigentlich in die Logik, weil aber einige seyn wollende Vernunftlehrer, ihren Schülern von der mathematischen Methode irrige Begriffe beybringen, so ist es nöthig hier kürzlich davon zu reden.

24. Ohne die Mathematik selbst zu kennen, kann man eine Nachricht aus dem übereinstimmenden Zeugnisse aller, die sich um die Geschichte der Gelehrsamkeit bekümmert haben, als zuverläßig annehmen; daß nehmlich alle Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig sind; Von keinem Theile der Gelehrsamkeit läßt sich dieses weiter sagen, da in ihnen überall, nicht über Kleinigkeiten, sondern über die ersten Gründe, und die wichtigsten Lehren gestritten wird. Was gibt wohl der Mathematik diesen Vorzug? Vielleicht ihr Gegenstand? Aber wie käme es, daß unsere Erkenntniß von der Grösse allein so gewiß, und von allen andern Dingen so ungewiß wäre? Sprechen wohl alle Mathematikverständige ihrem Lehrer seine Sätze mit einer Leichtgläubigkeit nach, die nur von dem Vorurtheile des Ansehens herrühret? Wie könnte ein solches Vorurtheil über diejenigen so unumschränkt herrschen, von denen jedermann weiß, daß sie ihren Fleiß für eine der schärfsten Uebungen des Verstandes ausgeben? Mit was für einer Verblendung hätten Euklid und Archimed sich vor Prüfungen schützen können, die den Plato und Aristoteles gestürzt haben? Ramus, dem es an Scharfsinnigkeit nicht fehlte, bestrebte sich eine neue Secte

in

in der Mathematik wie in der Philosophie zu stiften. Würde er Irrthümer im Euclides ungeahndet gelassen haben? Er tadelte nichts als die Ordnung der Sätze, und seine neue Ordnung hat keinen Beyfall gefunden.

25. Die Einigkeit der Mathematikverständigen läßt sich also nur aus ihrer Art ihre Lehren zu erforschen und vorzutragen herleiten. Diese muß so beschaffen seyn, daß sie selbst dadurch vor Irrthümern sicher sind, und andere zwingen können ihnen Beyfall zu geben.

26. Sie fangen von **Erklärungen** an; das ist, sie zeigen deutlich und genau an, in was für einer Bedeutung sie die ihnen eigenen Wörter brauchen, und gehen nie von dieser Bedeutung ab. Ihre Erklärungen enthalten weder mehr noch weniger Merkmahle als die Sache, von der die Rede ist, zu erkennen zulänglich sind. Zuweilen bestehen diese Merkmahle in der Art, wie die Sache entstehen kann, woraus man denn ihre Möglichkeit einsieht, und solche Erklärungen besonders **Sacherklärungen** nennt (definitiones reales vel geneticae). Die andern heissen **Worterklärungen** (nominales) und man nimmt nicht an, daß die erklärten Sachen möglich sind, ohne es erwiesen zu haben; eine Regel, die gewisse Vernunftlehrer nicht prahlerisch für ihre neue Erfindung ausgeben würden, wen sie wüßten, daß Euklides dieselbe aufs sorgfältigste beobachtet hat.

27. Aus

27. Aus den Erklärungen fliessen Grundsätze (axiomata) deren Wahrheit man einsieht, sobald man sie versteht. Der 8. Abs. enthält ein Exempel davon. Man kann aber hievon, und von allen Sätzen der mathematischen Methode Exempel von ganz andern Gegenständen als mathemathischen hernehmen. Es würde zu weitläufig werden, dergleichen hier überall einzurücken. Die Grundsätze werden von allen Menschen gebraucht, und oft ohne daß sie daran denken, aber nur auf einzelne Gegenstände angewandt; daher man sie auch gemeine Begriffe (notiones communes) nennt. Oft gibt ihnen nur ihr allgemeiner Ausdruck ein geheimnißvolles Ansehen.

28. Sie sind von zweyerley Art. Wenn sie blos Wahrheiten behaupten, so kann man ihnen diesen Nahmen in einem engern Verstande lassen. Wenn sie fodern, daß man eine Sache verrichten könne, ohne die Art, wie es geschehen soll, zu zeigen, weil solche vielleicht zu offenbahr in die Augen fällt, als daß sie dürfte gezeiget werden; so nennt man sie Heischesätze, Foderungen; (postulata). Sie nehmen also eine Sache als möglich an, ohne die Möglichkeit umständlich darzuthun.

29. Die Sätze, deren Richtigkeit nicht unmittelbar in die Augen fällt, sondern gewiesen werden muß, behaupten entweder blos, daß etwas so sey oder nicht sey; oder sie verlangen etwas zu bewerkstelligen. Jenes sind Lehrsätze; (theoremata)

dieses Aufgaben (problemata) denen man die Auflösung (solutio) die Art, wie das verlangte bewerkstelliget wird, beyfüget. Der Beweis des Lehrsatzes thut desselben Wahrheit dar, der Aufgabe ihrer zeiget, daß dasjenige, was man verlangt, erhalten wird, wenn man der Auflösung gemäß verfähret. Beyde bestehen in Schlüssen, die man, wenn es gefällig ist, in die syllogistische Form bringen kann, und wozu die Vordersätze aus den vorhergehenden Erklärungen, Grundsätzen und bewiesenen Sätzen genommen werden.

30. Zuweilen kömmt man in diesen Schlüssen auf Sätze, die an sich merkwürdig sind. Man kann sie also nach vollendetem Beweise besonders anzeigen. Dieses haben die Alten corollaria genannt. Gegenwärtig nimmt man dieses Wort und seine Verdeutschung Zusätze, mehr für Folgerungen, die sogleich aus dem erwiesenen Satze fliessen; für Lehrsätze, deren Beweis aus dem nur beygebrachten sogleich in die Augen fällt. In den Anmerkungen (scholia) pflegt man Erläuterungen und Anwendungen der vorgetragenen Sätze beyzubringen.

31. Das wesentliche der mathematischen Methode bestehet darinnen, was man lehret, aus Gründen, derer Wahrheit ungezweifelt ist, durch Schlüsse, deren Richtigkeit den Verstand zum Beyfalle zwinget darzuthun. In einem andern Verstande haben die wahren Kenner dieser Methode nie behauptet, daß man sich bestreben sollte, sie bey den übrigen Theilen

len der Gelehrsamkeit anzubringen. Die Pflicht, sie in diesem Verstande, so viel sich thun läßt, anzubringen, wird hoffentlich ein jeder Gelehrter zugeben, der nicht seiner Facultät die Lobrede halten will, daß sie keiner deutlichen Begriffe, keiner sichern Grundsätze, und keiner vernünftigen Schlüsse fähig sey. Daß die mathematische Methode mit der vernünftigen und philosophischen einerley sey, würde, wenn es auf Ansehen ankäme, das Zeugniß zweener einsichtsvoller, und bey dieser Frage weder als Mathematiker noch als Wolfianer verdächtiger Weltweisen, Locks (vom menschl. Verst. 4. B. 2. Cap. 10. §. und 3. Cap. 49. §.) und Hollmanns Log. 360. §. versichern.

32. Einen Unterschied unter der mathematischen und philosophischen Methode vorgeben, weil den Mathematikverständigen die Untersuchung der Grössen ein eigenes Verfahren erlaubte, das sich anderswo nicht nachahmen liesse, ist lächerlich, da niemand das Verfahren der Mathematikverständigen, in sofern es sich auf den ihnen eigenen Gegenstand bezieht, zur Nachahmung vorgeschlagen, niemand verlangt hat, wo keine Grössen vorkommen zu messen und zu rechnen.

33. Man hat die mathematische Methode besonders nach dem Verfahren des Euklides abgeschildert, und sie daher die geometrische oder euklidische genannt. Schwerlich wird man sie auch recht kennen lernen; wenn man nicht diesen Schrift-

steller,

steller, und solche, die ihm getreu folgen, liest. Neuere Lehrer der Geometrie sind von der gehörigen Schärfe im Beweisen oft weit abgewichen. Man muß dieses insbesondere von den Franzosen sagen. Es ist bey ihnen eine Folge, zum Theil der Nationalflüchtigkeit, zum Theil einer lobenswürdigen Ursache, der Neigung, welche vornehme Kriegsleute und andere, deren Hauptbeschäfftigung das Studiren nicht ist, zur Mathematik tragen. Solchen Personen hat man die Erlernung der Mathematik erleichtern und angenehm machen wollen. Aber Euklides wußte Königen keinen Weg zur Geometrie zu ebnen.

34. Ausser der Geometrie, ist noch eines und das andere bey der mathematischen Methode zu beobachten. In der Arithmetik hat man Zeichen für die Zahlen ausgedacht; deren Beschaffenheit und Einrichtung man durch willkührliche Sätze (hypotheses) erkläret, weil sich eben die Dinge mit ganz andern Zeichen hätten andeuten lassen. Man hat Kunstgriffe angebracht, vermittelst deren sich alle Zahlen, deren Menge unendlich ist, durch sehr wenige Zeichen ausdrücken, und mit einander vergleichen lassen. Die Kunstwörter in den Wissenschaften sind Zeichen der Begriffe, wie die Ziffern in der Arithmetik. Aber das Verfahren der Arithmetik, mit sehr wenig Zeichen, sehr viel Begriffe, verständlich und bequem auszudrücken, wird nicht überall bey den Kunstwörtern nachgeahmt. Besonders pflegen einige Philosophen auch dadurch

den grossen Unterschied zwischen ihrer philosophischen und der mathematischen Methode anzuzeigen; daß sie mit vielen Zeichen wenige Begriffe, und oft gar keine, ausdrücken.

35. In der angewandten Mathematik gehören zu den Grundsätzen, auch mit Erfahrungen, Beobachtungen und Versuche; durch eine aufmerksame Betrachtung der himmlischen Bewegungen sind die Astronomen zu einer Kenntniß derselben gelanget, welche die Schranken des menschlichen Verstandes fast zu übersteigen scheinet, ob ihnen gleich die Ursachen dieser Bewegungen noch jetzo nicht mit unstreitiger Gewißheit bekannt sind. Dieses grosse und unläugbare Beyspiel zeigt, daß sich der Nutzen der mathematischen Methode auch auf Gegenstände in der wirklichen Welt, von denen unsere Begriffe nicht willkührlich sind, anwenden lasse. Der Freyherr von Wolf hat es den Aerzten zur Nachahmung vorgestellt, und seine Erinnerung wird dadurch vollkommen gerechtfertiget, daß die alten griechischen Aerzte, die in der Kenntniß der Natur so weit unter den heutigen stehen, in der Heilung der Krankheiten noch ihre Lehrmeister bleiben. Sie haben nähmlich den menschlichen Körper so aufmerksam und sorgfältig betrachtet, als die Astronomen den Himmel.

36. Man hat sich in der Astronomie eines Mittels zu Erforschung der Wahrheit bedienet, das dem ersten Ansehen nach verführerisch scheinet. Man

nimmt

nimmt Hypotheſen an, oder man ſetzt zum voraus, es gehe mit einer gewiſſen Begebenheit auf die und die Art zu. Läßt ſich nun alles, was bey der Begebenheit und den damit verbundenen vorkömmt, aufs genaueſte aus der Hypotheſe herleiten, ſo erhält dieſelbe dadurch immer mehr und mehr Wahrſcheinlichkeit, und kann durch eine vollkommene Uebereinſtimmung aller Begebenheiten mit ihr, zu einer Gewißheit erhoben werden. Dieſe Vergleichung mit den Begebenheiten iſt alſo die Prüfung, bey der eine falſche Hypotheſe nicht lange beſtehen, wenigſtens nicht verführen kann, weil man ſie nicht länger beybehalten wird, als ſie der Wahrheit gleichgültig iſt. Indeſſen kann ſelbſt eine falſche Hypotheſe, durch das was in ihr wahr iſt, den Weg zu Kenntniſſen bahnen, zu denen man ohne alle Hypotheſen, nie gelanget wäre. Dieſes iſt von einigen als ein Fall angeſehen worden, wo man Wahrheit aus Unwahrheit richtig herleitet, und Erdichtungen zum Erfinden; (fictiones heuriſticas) mit Nutzen brauchte: Meiner Einſicht nach wird nie aus der Unwahrheit, ſondern allezeit aus der Wahrheit geſchloſſen. Es gibt Sätze, die nicht völlig wahr ſind, ſondern Wahrheit und Falſchheit untermenget haben; aber ſie dienen uns nur zu ſichern Gründen, in ſo fern ſie Wahrheit enthalten. Man muß auch das bedenken, daß in der Mathematik ſich nicht alle Gröſſen würklicher Dinge gleich anfangs mit der größten Richtigkeit finden laſſen; daß man ſie oft zuerſt nur ohngefähr beſtimmt, und

diese Bestimmungen selbst braucht daraus schärfere zu finden. Solche schärfere Bestimmungen suchen, heißt nicht die ersten für falsch erklären. Die Mathematik überzeuget uns durch unzählige Proben, daß wir auch bey der höchsten Erkänntniß der Menschen zufrieden seyn müssen, der Wahrheit immer näher und näher zu kommen, die wir vielleicht nie völlig erreichen werden.

Weil sich unser Aug am Kleid der Dinge stößt.

v. Haller.

37. Man kann bey dem Vortrage der schon erfundenen Wahrheiten etwas anders verfahren, als bey der Erforschung solcher, die noch unbekannt sind. Dorten ist es genug, jeden Satz überzeugend darzuthun, ob gleich aus seinem Beweise eben nicht erhellet, wie sein erster Erfinder auf ihn gekommen ist: Hier muß man den Weg zeigen, auf welchem man zu dem gesuchten gelangen kann. Jene Lehrart pflegt man die synthetische, diese die analytische zu nennen. Aus beyden läßt sich eine vermischte zusammensetzen, welche zum Vortrage der Anfangsgründe der Wissenschaften am bequemsten ist.

Die

Die Rechenkunst.

I. Capitel.

Von ganzen Zahlen, Brüchen, und entgegengesetzten Grössen.

1. Erkl. Dinge von einer Art, sind solche, bey denen blos dasjenige betrachtet wird, was sie mit einander gemein haben; z. E. ein Spanier und ein Deutscher, beyde als Europäer betrachtet. Dinge, bey denen man nur das Verschiedene betrachtet, heissen Dinge von verschiedener Art; z. E. eben die beyden betrachtet, in so fern sie zu verschiedenen Nationen Europens gehören.

2. Erkl. Eine Menge von Dingen einer Art, heißt eine ganze Zahl oder im Anfange dieses Capitels überhaupt eine Zahl.

3. Zus. Die Dinge, die sich sollen zusammen zählen lassen, oder eine Zahl ausmachen, müssen von einer Art seyn. Drey Spanier und zween Deutsche machen als Spanier und als Deutsche nicht die Zahl Fünf aus; denn es sind weder fünf Spanier noch fünf Deutsche; aber als Europäer machen sie solche aus.

4. Erkl. Dasjenige, was die Dinge, die zusammen gezählet werden gemein haben, heißt die Ein-

heit, und die Zahl ist also eine Menge von Einheiten (2).

Bey der Zahl, Fünfe (3) wäre die Einheit ein Europäer.

5. Erkl. Eine Zahl wird **vermehret** oder **vermindert**, wenn solche Einheiten, aus denen sie bestehet, zu ihr gesetzet oder von ihr weggenommen werden.

6. Erkl. Wenn nach Gefallen zu einer Zahl eine oder mehr andere, die jener nicht gleich sind, gesetzt werden, so heißt diese Vermehrung, die Addition; die Zahl aber, welche allen zusammengenommenen gleich ist, die Summe.

7. Erkl. Eine Zahl zu wiederhohlten mahlen zu sich selbst addiren, heißt sie **multipliciren**. Was herauskömmt, heißt das Product oder Factum; die Zahl, welche **multipliciret** wird, d. i. die man etliche mahl zu sich addiret, und die Zahl, **mit der multipliciret wird**, d. i. die, welche anzeiget, wie vielmahl jene addiret wird, heissen gemeinschaftlich, Factoren.

A * * * * B
* * * *
C * * * * D

Wenn die Zahl die in der Quer-Reihe oder Zeile AB stehet, so viel mahl hingesetzt wird als die Zahl anzeiget, die in der lothrechten Reihe AC stehet, so entstehet das Product ACDB.

8. Zus.

8. Zus. Die Zahl AB ist in dem Producte so vielmahl enthalten, als die Einheit in der Zahl AC. Denn für jede Einheit der Zahl AC, wird die Zahl AB einmahl hingesetzt.

9. Zus. So viel Einheiten AC hat, so viel Zeilen wie AB kommen unter einander. Die erste Einheit von AB, die zunächst bey A stehet, gibt also eine lothrechte Reihe von A nach C, welche so viel Einheiten enthält als AC; die zweyte Einheit von AB, mit den unter ihr stehenden, gibt eben dergleichen lothrechte Reihe, und so jede Einheit von AB ferner. Also kommen so viel lothrechte Reihen, jede der Zahl AC gleich, so viel AB Einheiten hat, und das Product enthält also AC so vielmahl als die Einheit in AB enthalten ist.

10. Zus. Jeder Factor steckt in dem Producte so vielemahl als die Einheit in den andern (8. 9.) und es ist einerley, ob AB mit AC oder AC mit AB multiplicirt wird; d. i. einerley Factoren geben mit veränderter Ordnung doch einerley Producte.

11. Erkl. Wenn von einer Zahl eine andere nach Gefallen weggenommen wird, so heißt dieses Verfahren die Subtraction, oder das Abziehen. Und was nach weggenommener Zahl übrig bleibt, die Differenz, der Unterschied, der Ueberschuß.

12. Zus. Der Unterschied und die weggenommene Zahl zusammen, machen die Zahl aus, von welchen der Abzug geschehen ist.

13. Erkl. Wenn man eine Zahl d

* * * * * d * * * * *
* * * * * Q * * * *
D * * * * *
* * * * *

von einer andern D zu wiederhohlten mahlen so oft abzieht, bis von D nichts mehr vorhanden ist, so heißt dieses Verfahren Dividiren, die Zahl D heißt der Dividendus und d der Divisor; die Zahl Q, welche anzeigt, wie oft der Abzug geschehen kann, heißt der Quotient.

14. Zus. Man stelle sich die Einheiten, welche D ausmachen in Zeilen jede von so viel Einheiten als d enthält gesetzt vor, so wird Q die Menge dieser Zeilen seyn. Für jede Zeile nähmlich, oder für jede d in D, kömmt eine Einheit in Q. Also steckt der Divisor so vielmahl im Dividendus als die Einheit im Quotienten.

15. Zus. Der Dividendus bestehet aus so viel Zeilen, d. i. aus so viel gleich grossen Stücken, so viel Einheiten der Quotient hat, und also ist die Division eine Eintheilung.

16. Zus. Der Divisor mit dem Quotienten multipliciret gibt den Dividendus (14) und ein Product, mit dem einen Factor dividirt, gibt den andern (10).

17. Zus. D und d können so angenommen werden, daß sich D nicht in Zeilen, jede so groß als

d ab=

d abtheilen läßt. Z. E. wenn d aus 13. beybehalten, aber D aus 7 genommen wird, so gäbe das Verfahren (14) folgendes:

* * * * *
* * * * *
* *
* *

Dieses zeigte also, daß d zweymahl genommen, dieses D noch nicht ausmachet; dreymahl genommen aber mehr ausmachen würde. Q muß also hier zwischen zwey und drey fallen; was es eigentlich ist zu erklären, gehöret in die Lehre von den Brüchen.

18. Zus. Alle Veränderungen ganzer Zahlen geschehen auf eine der erzählten vier Arten (6. 7. 11. 13.) dieses sind die Species der Rechenkunst.

19. Willk. Satz. Man gebe jeder der ersten zehen Zahlen einen eigenen Nahmen; Jede grössere Zahl ist entweder die Summe einer kleinern und der Zehn, oder ein vielfaches der Zehn; oder die Summe eines vielfachen und einer kleinern; und diese Mannichfaltigkeit zeige man durch die verschiedene Art ihre Nahmen zu bilden an; z. E. Neunzehn; Neunzig; Neunund neunzig. Die Unbequemlichkeit und Verwirrung zu vermeiden, welche die allzuöftere Wiederhohlung eines Tons verursachen würde, nenne man zehnmahlzehen, Hundert; Zehnmahl hundert, Tausend; Tausendmahl tausend, Million; Millionmahl Million, Billion; Millionmahl Billion, Trillion; Millionmahl Trillion, Quadrillion u. s. f.

20. Anm. Die Nahmen der Zahlen, die jeder in den Sprachen weiß, die er verstehet, sind nicht nöthig herzusetzen. Der Kunstgriff aber, eine so grosse Menge von Begriffen als die Mannichfaltigkeit der Zahlen enthält, mit so wenig Zeichen auszudrücken, verdienet Aufmerksamkeit, und ist eine Probe der Zeichenkunst (ars characteristica); welche Betrachtungen über die Art, die Gedanken durch bequeme Zeichen anzudeuten, über die Kunstwörter in den Wissenschaften (Leibnit. Praef. ad Nizol. Antibarb.) und über die Beschaffenheit der Sprachen, welche zum Vortrage der Wissenschaften bequem seyn sollen (Steuin. Geograph. L. I. def. 6.) veranlassen.

21. Anm. Es wäre nicht nothwendig bis auf 10. zu zählen, sondern es lassen sich so vielerley Arten zu zählen, so viel Zahlen sind, erdenken. Hieher gehören Leibnitzens Arithmetica Dyadica, u. d. g.

22. Zusatz. Zehn einzelne Einheiten machen eine zusammengesetzte aus, die man zehn nennt; zehn Zehnen, wieder eine neue zusammengesetzte, die Hundert heißt, u. s. w. Diese zusammengesetzte Einheiten kann man nach Ordnungen unterscheiden, die Zehnen machen die erste Ordnung aus, die Hunderte die zweyte, u. s. w. begreift die Einheit jeder höhern Ordnung, zehn Einheiten der nächstniedrigen in sich.

23. Zus. Also kann jede der bekannten Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, verschiedene Zahlen bedeuten, nachdem sie sich auf Einheiten verschiedener

ner Art beziehet. Man muß aber ein Merkmahl haben, zu erkennen, auf was für Einheiten sie sich beziehet.

24. Willk. Satz. Dieses Merkmahl soll die Stelle der Zifer geben. Eine Zifer allein bedeutet eine Menge einzelner Einheiten, und heißt ein Einer. Für eine Zifer, die die zweyte Stelle von der rechten Hand gegen die linke einnimmt, ist die Einheit Zehn, und die Zifer heißt ein Zehner. In der dritten, vierten, fünften Stelle stehn Hunderter, Tausender, Zehntausender, und so wird die Einheit jeder Zifer zehnmahl grösser, wenn sie nach der linken Hand zu, eine Stelle weiter rückt. Sind von einer gewissen Ordnung (22) keine Einheiten vorhanden, aber welche von höhern Ordnungen, so füllt man die Stelle der fehlenden mit der o aus. Man kann die Zifern in Ordnungen wie die Einheiten abtheilen, auf die sie sich beziehen.

25. Anm. Diese Zifern werden für eine Erfindung der Morgenländer gehalten, wovon schon das ein zulänglicher Beweis ist, daß sie mit der Art dieser Völker, von der rechten gegen die linke zu schreiben, so viel Uebereinstimmung zeigen. Sie haben vor den Zahlbuchstaben einen ungemeinen Vorzug. Wollte man sich ihrer nicht bedienen, so würde man grosse Rechnungen schwerlich anders, als durch die ihnen ähnliche Erfindung des Rechenbretes, vollenden können.

26. Zus. Wenn sechs Zifern beysammen stehen, so beziehen sie sich auf Eins, Zehn, Hundert, Tausend, Zehntausend, Hunderttausend. So viel Zifern oder weniger kann jeder in der Sprache aussprechen, die er versteht, oder eine Zahl, die nur so viel Zifern erfodert, schreiben, wenn sie ihm mit Worten gesagt wird.

Aufgabe.

27. Eine Zahl, die mit Zifern geschrieben ist, mit Worten auszusprechen.

Auflös. Man theile die Zifern in Classen, von der rechten Hand gegen die linke, daß jede Classe sechs Zifern bekömmt, die am weitesten zur linken steht, kann weniger haben. Die Zifern jeder Classe spreche man nach (26) aus, und sage nach der ersten Classe, die am weitesten zur rechten Hand stehet, Eins nach der zweyten, dritten, vierten, fünften, sechsten u. s. f. Classe Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen, Quinquillionen, u. s. f. da man sich denn auch, dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, die Millionen mit einem Striche, die Billionen mit zweenen, u. s. w. andeuten kann.

Exempel 83''' 403578'' 573084' 670243 dieses wird heissen: drey und achtzig Trillionen, vier hundert und drey tausend, fünf hundert und acht und siebenzig Billionen; fünf hundert und drey und siebenzig tausend, kein hundert und vier und achtzig Millionen, sechs hundert und siebenzig tausend, zwey hundert und drey und vierzig mahl Eins.

Beweis. In jeder Classe kann jede Zifer als eine Menge von Einheiten der niedrigsten Zifer in selbiger Classe ausgesprochen werden; z. E. die 7 der zweyten Classe bedeutet siebenzig tausend solche Einheiten, dergleichen die 4 eben dieser Classe, vier bedeutet. Daß aber die niedrigsten Zifern der Classen, zu ihren Einheiten nach der gemachten Abtheilung, schlechte Einheiten, Millionen, Billionen, u. s. f. haben, erhellet aus 22. und 19. Jede Einheit nähmlich, die sechs Ordnungen höher ist als eine andere, gilt eine Millionmahl mehr, und eine Zifer, die sechs Stellen höher stehet als eine andere, beziehet sich eben so auf Einheiten, die eine Millionmahl mehr sind als die Einheiten der niedrigern (24).

28. **Anm.** Die Eins bey der niedrigsten Classe, ist nicht nöthig auszusprechen. Zuweilen deutet man die Ordnung der Zifern (24) durch kleine Zifern an, die man darüber schreibt. So würde die niedrigste Classe des Exempels folgendermassen aussehen

$$\overset{5}{6}\ \overset{4}{7}\ \overset{3}{0}\ \overset{2}{2}\ \overset{1}{3}\ 4$$

dieses dienet grosse Zahlen zu schreiben, ohne daß man so viel Zifern oder Nullen braucht als sonst nöthig wäre;

z. E. 25^{42} heißt 25 Sexillionen, und bedeutet, daß 42 Nullen rechter Hand der Zifern 25 stehen sollten. Uebrigens ist bey einer Zahl, die mit verschiedenen Zifern geschrieben wird, die Zahl der Ordnungen um eins geringer

als

als die Zahl der Zifern, weil die erste Ordnung der Zehner, zwo Zifern, und so jede Ordnung eine Zifer mehr erfodert.

29. Zus. Eine Zahl, die mit Worten vorgesagt wird, mit Zifern zu schreiben, schreibe man für jede Menge von Einheiten einer gewissen Ordnung die gehörige Zifer, in die gehörige Stelle, welches nicht eher vollendet werden kann, als bis die Zahl völlig hergesagt ist, weil wir die Zifern nach unserer Gewohnheit, aber der Gewohnheit ihrer Erfinder zuwieder (25) von der linken gegen die rechte lesen.

30. Willk. Satz. Die Zeichen der arithmetischen Arbeiten sind folgende. Der Addition +, der Subtraction —, der Multiplication ·, und der Division :, der Gleichheit aber =; z. E. $3 + 4 = 7$; $9 - 5 = 4$; $3 \cdot 7 = 21$; $12 : 3 = 4$; bezieht sich eine Arbeit zugleich auf verschiedene Zahlen, so schließt man sie zusammen in eine Parenthesis ein. Z. E. $(7 + 6 - [12 - 5]) \cdot 8 : (5 + 7) = 4$. Einige bedienen sich für die Multiplication auch des Andreaskreuzes, z. E. $5 \times 4 = 20$. Noch ein Zeichen der Division kömmt unten (61) vor. Daß eine Grösse, mehr als die andere sey, wird durch nachstehendes Zeichen angedeutet, dessen Oeffnung sich nach der größten, die Spitze nach der kleinsten kehret. 8 f.

Auf-

Aufgabe.

31. Verschiedene Zahlen zusammen zu addiren.

Auflös.

6 7 8 3 4 5	A
5 3 2 1	B
4 8 9 4	C
1 0	D
1 5	E
1 4	F
1 7	G
6 7	H
6 8 8 5 6 0	I

I) Man schreibe die Zahlen, die man addiren will, so unter einander, daß Zifern einerley Ordnung (24) unter einander kommen, wie A, B, C, im Exempel.

II) Man zähle die Zifern zusammen, die in einer Reihe untereinander stehen, und schreibe die niedrigste Zifer jeder solcher Summe, unter die Reihe, von welcher die Summe herrühret, wie D, E, F, G, H.

III) Diese einzelnen Summen addire man wieder auf eben die Art, die völlige Summe I zu erhalten.

Bew. Man addirt solchergestalt alle Theile der Zahlen A, B, C, zusammen; also bekömmt man ihre Summe (Vorerinn. 8.) und weil man nach I) allemahl Theile, die einerley Einheiten haben, zusammenzählet, so braucht man währenden Zusammenzählens an die Einheiten jeder Reihe nicht zu denken, welche sich von selbst durch II. geben.

32. Anm. I) wird erfüllt, wenn man nur die Einer unter die Einer schreibt (24) d. i. wenn sich die Zahlen alle, rechter Hand gerade unter einander anfangen.

33. Anm. So oft die Summe einer Reihe mehr als 9 beträgt, wird für jede Zehne eine Eins in die nächst höhere Stelle geschrieben. Darauf gründet sich die Probe des Addirens durch Wegwerfen der 9.

34. Anm. Man kann von jeder Summe wie D, E, u. s. f. die höhere Zifer gleich in Gedanken zu der niedrigsten der folgenden Summe addiren, und also die Summe I auf einmahl finden, ohne die einzelnen hingeschrieben zu haben.

Aufgabe.

35. **Eine kleine Zahl von einer grossen abzuziehen.**

Aufl. I) Man schreibe die Zahlen wie 31 I)

II) Man nehme jede Zifer der abzuziehenden Zahl B, von der darüber stehenden der Zahl A weg.

3467	A
254	B
3213	
4.3.2	C
167	D
265	

III) Wenn dieses nicht angeht, so stelle man sich vor die nächst höhere Zifer der Zahl, von welcher der Abzug geschehen soll, werde um eine Einheit vermindert, und diese Einheit zu der Zifer gebracht, von welcher man eine darunterstehende grössere abziehen sollte, so gilt die geborgte Einheit da 10; wie bey C wenn man eine Einheit von 3 in die Stelle der 2 bringt, dieses so viel ist, als wenn daselbst 12 stünde.

Da

Da nun die Zifer, die man abziehen soll, nie über 9 ist, so kann man den Abzug allemahl verrichten, und muß bey der Zifer, wo man geborgt hat, ein Zeichen, etwa einen Punct, machen.

IIII. Wenn die nächst höhere Stelle oder einige der nächst höhern mit Nullen ausgefüllt sind, so borget man bey der ersten höhern Zifer, wo es angeht, verfährt mit der daselbst weggenommenen Einheit bey der Zifer, von welcher der Abzug einer grössern geschehen sollte, nach III) und sieht die dazwischen liegenden Nullen an, als wären sie alle in Neunen verwandelt.

7.0004 E
42356 F

27648

Bew. II) ist offenbahr, weil solchergestalt die Theile der Zahl B einzeln von den Theilen der Zahl A weggenommen werden. III) Gründet sich darauf, daß man (nach Vorerinn. 8) eine Zahl aus ihren Theilen verschiedentlich zusammensetzen kann, wenn man sie nur alle behält; also liesse sich C so schreiben,

300
120
12

da könnte man denn bey der Zahl D, 7 von 12; Sechs Zehner von Zwölf Zehnern; und einen Hunderter von dreyen wegnehmen. Wenn man über eine Null borget, so muß die geborgte Einheit zuerst in die Stelle der o gebracht werden, die der Zifer von welcher man borget, zunächst rechter Hand stehet,

welches so viel wäre, als ob 10 in der Stelle dieser o stünde. Befindet sich nun rechter Hand der erwähnten o, noch eine, so nimmt man von der erhaltenen 10 eine Eins weg diese o in 10 zu verwandeln, daß also dorten 9 stehen bleibt, und so geht es fort bis an die Zifer, für die man geborgt hat.

Anm. Die Addition und Subtraction, dienen einander gegenseitig zu Proben (12).

Aufgabe.

36. Alle Producte zu finden, die herauskommen, wenn man zwo Zahlen, deren jede mit einer Zifer geschrieben wird, mit einander multipliciret. Oder das Einmahl Eins zu verfertigen.

Auflös. Man addire jede solche Zahl, zu sich selbst, so hat man ihr Doppeltes, und zu ihrem Doppelten, so hat man ihr Dreyfaches, und zu ihrem Dreyfachen, so hat man ihr Vierfaches u. s. w. welches man nur bis auf das Neunfache fortzusetzen braucht. Wenn man diese Producte unter die Zahlen, von denen sie herrühren, und neben die Zahlen, welche das vielfache anzeigen, schreibet, so erhält man eine Tafel, wo man jedes Product zweymahl, jedesmahl in dem Fache antrifft, das sich unter dem einen Factor, und neben dem andern befindet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

37. Zuſ. Wenn eine Zifer einer höhern Ordnung mit einem Einer multipliciret wird, ſo iſt das Product von der Ordnung des höhern Factors; denn es iſt derſelbe ſo vielmahl genommen als der Einer anzeigt. Z. E. 9000. 7 = 9. 7. 1000 = 63000.

38. Zuſ. Iſt der andere Factor auch eine höhere Zifer, ſo wird dadurch das Product ohnſtreitig ſo vielmahl höher als es wäre, wenn dieſer Factor ein Einer wäre, ſo vielmahl der Factor höher iſt. Z. E. eine Zahl mit 3000 multiplicirt, iſt ohnſtreitig 1000 mahl ſo viel als mit 3 multiplicirt. Folglich iſt 9000. 700 ohnſtreitig 100 mahl ſo viel als 9000. 7. Eine Zifer wird aber um ſo viel Ordnungen erhöhet, ſo

viel man Nullen zu ihrer Rechten schreibt (24) also müssen die Nullen, die an der 7 zur Rechten stehen, noch an das Product 9000.7. geschrieben werden. Das Product 9000. 7 aber war 9. 7 mit so viel Nullen als an der 9 stunden, (37) also ist 9000. 700 so viel als 9. 7 mit so viel Nullen als an der 9 und an der 7 zusammen stehen. Das ist, zwo Zifern, deren jede Nullen zur rechten Hand hat multipliciren, heißt die beyden Zifern als Einer multipliciren, und an das Product rechter Hand so viel Nullen schreiben, als an beyden Zifern zusammen stunden. Oder die Ordnung des Products zwoer Zifern höherer Ordnungen wird gefunden, wenn man ihre beyden Ordnungen zusammen rechnet

7 4 11

(24). Z. E. 5. 3=15. Dieses zeigt wie das Einmahleins alle Zahlen zu multipliciren zulänglich ist.

Aufgabe.

39. Zwo Zahlen mit einander zu multipliciren.

I. Fall. Wenn ein Factor B nur eine Zifer hat. Man multiplicire jede Zifer von A durch B, vermittelst des Einmahleins (36) und schreibe die niedrigste Zifer jedes Products unter die Zifer von A von der es herrührt (37); Ferner addire man die einzelnen Producte, so ist

34785	A
9	B
45	C
72	D
63	E
36	F
27	G
313065	H

C+D+E+F+G=H=A.B

II. Fall.

34785 = K
20469 = L

313065 M
208710 N
139140 O
695700 P

712014165 = Q

II. Fall. Wenn der andere Factor wie L mehr Ziffern hat, so verfahre man mit jeder nach dem ersten Falle, und rechne die einzelnen Producte wie C, D, E, F, G, in Gedanken zusammen, daß man sogleich das ganze M hinschreiben kann. Jedes dieser ganzen Producte aber von K durch eine Zifer von L schreibe man so, daß seine niedrigste Zifer, unter der Zifer von L stehet, von der es herrühret (38). Ist statt dieser Zifer eine o, so braucht man wie bey P nur unter sie eine o zu schreiben und das Product aus der nächst höhern Zifer von L in K (aus der 2) in eben die Zeile (P) unter dieser nächst höhern Zifer anzufangen. Zuletzt ist

M+N+O+P=Q=L.K

Aufgabe.

40. Zwo Zahlen mit einander zu dividiren. Ich nehme an, daß der Divisor kleiner ist als der Dividendus.

Aufl. I. Fall. Wenn der Divisor nur eine Zifer hat

B	A	C		
5	97645	10000	D	
	5	9000	E	
		500	F	
	47645	20	G	
	45	9	H	
	2645			
	25			
	145			
	100			
	45			
	45			
	o			

I) Man suche, wievielmahl der Divisor in der höchsten Zifer des Dividendi enthalten ist. Dieses geschieht, indem man aus dem Einmahleins die Zifer aufsuchet, welche mit dem Divisor multiplicirt, ein Product gibt das der höchsten Zifer des Dividendus gleich, oder zunächst kleiner ist.

II) Diese Zifer schreibe man in die Stelle des Quotienten, und nach ihr so viel Nullen als Zifern im Divisor nach der höchsten folgen, wie bey D.

III) Dieser gefundene Theil des Quotienten zeigt nehmlich an, wie vielmahl der Divisor nach solchen Einheiten im Dividendus enthalten sey, wie die Einheiten der höchsten Zifer des Dividendus sind; z. E. wie viel zehntausende des Divisors im Dividendus stecken. Weil also in der höchsten Zifer des Dividendus noch Mengen des Divisors stecken können, die nicht durch so grosse Einheiten wie die nur erwähnten auszudrücken sind, so multiplicire man

IIII) den gefundenen Theil des Quotienten D mit dem Divisor (5) und ziehe das Product von der Zifer des Dividendus in die man dividirt hat (9) ab. Man braucht weder an das Product noch an den Rest die Nullen, die bey D stehen, zu schreiben, weil diese Zifern schon von ihren Stellen den gehörigen Werth bekommen, daß es so viel ist als ob Nullen zu ihrer Rechten stünden.

V) Zu dem Reste nehme man die nächstfolgende Zifer, und verfahre mit dem, was man solchergestalt erhält, nach der 1. Regel, die Zifer, die herauskömmt, ist der zweyte Theil des Quotienten, und nach ihr gehören so viel Nullen als Zifern im Dividendus nach der niedrigsten unter denen, in welche man dividirt hat (7) folgen; (E)

VI) Nun verfährt man mit E wie mit D in der IIII. Reg. und mit dem Reste nach der fünften Regel, welche Arbeit so lange fortgesetzt wird als Zifern im Dividendus vorhanden sind. Jede neue Zifer des Dividendus, die zu dem nächstvorhergehenden Reste genommen wird, gibt im Quotienten eine Zifer, nach der so viel Nullen folgen, so viel Zifern nach dieser Zifer im Dividendus zur rechten Hand stunden.

VII) Weil diese Nullen nur dienen den Werth der Zifern des Dividendus anzuzeigen, so hat man sie bey der Ausübung nicht nöthig, weil die verschiedenen Zifern des Dividendus nach einander selbst diese Stellen ausfüllen; z. E. der Quotient D+E+F+G+H wird zusammen 19529.

VIII) Wenn der Divisor in der höchsten Zifer des Dividendus nicht einmahl enthalten ist, so nimmt man sie zu der nachfolgenden, und wenn er in dem Reste und der dazu kommenden neuen Zifer nicht enthalten ist, so schreibt man dafür eine o in den Quotienten und nimmt zu dieser Zifer des Dividendus die nächstfolgende.

7	6314	902
	63	
	014	
	14	
	o	

VIIII) Der Beweis von diesem allen ist offenbahr, und gründet sich darauf, daß man die Theile des Quotienten suchet, wie sie sich nach und nach durch Zifern auf die Art ausdrucken lassen, wie der Divisor und Dividend selbst ausgedruckt sind.

X. II. Fall. Wenn der Divisor mehr als eine Zifer hat, so vergleicht man den Divisor nach obigen Regeln allemahl mit soviel Zifern des Dividendus als er selbst hat.

L	M	N
37	7654	206
	74	
	254	O
	222	
	32	P

XI) Diese Vergleichung anzustellen, und z. E. zu finden, wie vielmahl 37 in 76 steckt, könnte man vorläufig 37 durch alle Zahlen von 1 bis 9 multipliciren, und also ein Einmahleins für den Divisor machen, welches Verfahren in der That, wenn der Divisor groß ist, einige Bequemlichkeit bringt, und von Ludolfen ist vorgeschlagen worden, ohne das Einmahleins zu dividiren.

XII.

XII. Auser dem aber, sucht man nur, wie vielmahl die erste Zifer des Divisors in der ersten des Dividendus steckt, und nimmt an, der ganze Divisor stecke eben so vielmahl in den ihm zugehörigen Zifern des Dividendus. Dieses kann falsch seyn; wie bey O; aber das entdeckt sich durch die IIII. Regel, da das Product grösser kommen wird als die Zahl, von der man es abziehen soll. Man muß also den Theil des Quotienten, der solchergestalt gefunden werden soll, so lange vermindern, bis das Product aus ihm in den Divisor sich abziehen läßt, die Regel dieses 12 Abs. kann nähmlich den Quotienten allzugroß, aber nie zu klein geben.

XIII. Wenn etwas übrig bleibt, wie P, so enthält der Dividendus den Divisor einigemahl ganz, und noch etwas von ihm darüber, welches keinen ganzen Divisor beträgt. Dieses wird sich erst unten erklären lassen (61).

XIIII. Anm. Diese Art zu dividiren nennt man unter sich dividiren. Alle Producte werden dabey ordentlich hingeschrieben, man kann also Fehler in Machung der Producte oder im Abziehen leicht vermeiden und entdecken. Auch hat man das Product schon vor Augen, wenn einerley Zifer im Quotienten zu wiederhohlten mahlen vorkömmt. Dadurch erhält dieses Verfahren grosse Vorzüge, vor dem dividiren über sich, da man die Producte in Gedanken macht und abzieht.

XV. Wenn nichts übrig bleibt, so fließt die Probe der Division aus (16).

41. Anm. Die geschickte Art die Zahlen mit den Zifern zu bezeichnen, bringet durchgehends den Vortheil, daß man an den Werth der Zifern währender Arbeit nicht denken darf, weil sich solcher durch ihre Stellen gibt, diese aber durch die Regeln, denen man blindlings folgen kann, auch wenn man ihren Grund nicht verstünde, bestimmt werden.

42. Anm. Im gemeinen Leben, im Handel, in Künsten und Wissenschaften theilet man die grössern Einheiten auf verschiedene Arten in kleinere ein. Die Rechnung damit heißt man, in genannten Zahlen. Sie erfodert weiter keine neuen Regeln, als daß man weiß, wie viel kleinere Einheiten auf jede nächst grössere gehen.

Von den Potenzen.

43. Erkl. Ein Product aus zween gleichen Factoren heißt ein Quadrat, und der Factor, der mit sich selbst multiplicirt wird, dessen Wurzel

z. E. 9 = 3. 3

44. Erkl. Das Quadrat mit seiner Wurzel multiplicirt, gibt den Würfel, ein Product aus drey gleichen Factoren, deren jeder hier die Cubikwurzel heißt

16. 4 = 4. 4. 4 = 64.

45. Erkl. Ein Product aus lauter gleichen Factoren, heißt eine Potenz des Factors, der in diesem Producte etliche mahl mit sich selbst multiplicirt wird. Der Grad der Potenz heißt die Menge von gleichen Factoren; und die Wurzel heiß einer dieser Factoren.

46. Willk.

46. Willk. Satz. Man schreibt eine Potenz so, daß man oben an die Zifer, welche die Wurzel andeutet, eine kleine Zifer setzet, welche den Grad der Potenz anzeigt, und der Exponent heißt.

Die Exempel 43. 44. sehen so aus:

$$9 = 3^2 ; \; 64 = 4^3$$

So ist $625 = 5.5.5.5 = 5^4$, welche Potenz die vierte, oder das Biquadrat heißt. Imgleichen ist eine Million, die sechste Potenz der 10 oder $= 10^6$

47. Erkl. Die Wurzel eines gewissen Grades aus einer Zahl ziehen, heißt diese Zahl als eine Potenz selbigen Grades ansehen, und die Zahl suchen, die so viel mahl mit sich selbst multiplicirt als der Grad der Potenz erfodert, die gegebene Zahl hervorbringt.

48. Willk. Satz. Das Zeichen der Wurzel ist $\sqrt{}$ und man schreibt den Exponenten der Wurzel in die Oefnung des Wurzelzeichens, bey dem Quadrate aber, da er 2 seyn sollte, läßt man ihn weg.

$$\sqrt{9} = 3 ; \; \sqrt[3]{64} = 4 ; \; \sqrt[4]{625} = 5 ; \; \sqrt[6]{1000000} = 10$$

49. Zus. Der einzelnen Zifern Quadrate stehen im Einmahleins, und ihre Würfel lassen sich daraus leicht machen. Dieses gibt folgendes Quadrat- und Cubiktäfelchen.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

50. Zus. Wenn an einer oder mehr Zifern rechter Hand Nullen stehen, so ist ihr Quadrat, das Quadrat der Zifern mit noch einmahl so viel Nullen, und ihr Würfel, der Würfel der Zifern mit dreymahl so viel Nullen, oder, das Quadrat und der Cubus einer Zahl von gewisser Ordnung, sind das Quadrat und der Cubus dieser Zahl blos als einer Menge von Einern betrachtet, aber auf die doppelte oder dreyfache Ordnung erhöhet (38).

$$500^2 = 250000 \qquad (7)^3 = 7^{\overset{4}{12}}$$

51. Zus. Bey einer Zahl die nach (27) geschrieben ist, kann man jede Zifer als einen schlechten Einer ansehen, der in die Potenz der Zehne multiplicirt wäre, deren Exponent die Ordnung der Zifer (38) anzeigt.

$$64327 = 6.10^4 + 4.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 7$$

Von den Brüchen.

52. Erkl. Wenn ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilet wird, und deren einige genommen werden, so heißt dieses Stück in Vergleichung mit dem Ganzen betrachtet ein Bruch. Z. E. Ein Gulden enthält zwey Drittheile des Thalers.

53. Zus. Also muß man wissen, in wie viel Theile das Ganze ist getheilet worden, und wieviel deren

ren auf den Bruch gehen. Das erste zeiget der Nenner (denominator) (drey) das letzte der Zähler (numerator) (zwey) an. Jener gibt dem Bruche den Nahmen; dieser zählet die Menge der Theile, die ihn ausmachen. Nimmt man einen dieser Theile für die Einheit an, so wird der Bruch eine ganze Zahl, die so viel solche Einheiten hat, als der vorige Zähler anzeigte.

54. Willk. S. Man schreibe den Zähler oben, und den Nenner unten, zwischen beyde einen Strich, $\frac{2}{3}$

55. Zus. Wenn der Bruch kleiner als das Ganze ist, so ist er ein so grosses Stücke des Ganzen, so ein grosses Stücke sein Zähler von seinem Nenner ist.

56. Zus. Man kann so viel Theile, oder auch mehr nehmen, als das Ganze einmahl ausmachen; z. E. $\frac{4}{4}$ oder $\frac{17}{3}$; In diesem Falle begreift der Bruch das Ganze einmahl, oder etliche mahl, oder etliche mahl und noch ein Stück desselben darüber in sich.

57. Erkl. Brüche wie (55,) heissen eigentliche (verae,) wie (56) uneigentliche, Bastardbrüche, (spuriae).

58. Zus. Eine grosse ganze Zahl (12) kann nicht in einer kleinen ganzen (7) stecken; aber ein Stück der grossen Zahl wird die kleine ausmachen. Wie viel dieses Stück betrage, findet man so: Man theilet jede Zahl in ihre Einheiten, und fragt, wie viel Einheiten der grossen Zahl die kleine ausmachen.

chen. Die kleine Zahl begreift solchergestalt etliche Einheiten, als Theile der grossen in sich, und kann als ein Bruch von der grossen angesehen werden, dessen Nenner die Menge der Einheiten der grossen Zahl, und der Zähler die Menge der Einheiten der kleinen Zahl ist. ($\frac{7}{12}$) Dieser Bruch zeigt also an, was für ein Stück der grossen Zahl in der kleinen enthalten ist. Er ist also der Quotient, den die kleine Zahl mit der grossen dividirt gibt, bey welcher Division man nicht fragen kann, **wie vielmahl** die grosse Zahl, sondern **was für ein Theil** der grossen Zahl in der kleinen enthalten ist, obgleich der Sprachgebrauch auch verstattet diese Frage durch $\frac{1}{2}$ mahl, $\frac{3}{4}$ mahl u. s. w. zu beantworten.

59. Zus. Ein uneigentlicher Bruch, begreift das Ganze so vielmahl in sich, so vielmahl sein Zähler den Nenner in sich begreift, und ist also der Quotient den der Zähler mit dem Nenner dividiret gibt.

60. Zus. Wenn der Zähler den Nenner etliche mahl ganz, und noch ein Stück darüber enthält, so läßt sich solches Stück nach 58. ausdrucken; ($\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$). Da nun Brüche und Quotienten einerley sind, (58. 59) so erhellet, was den Quotienten zwoer ganzen Zahlen zu finden, geschehen muß, wenn sich der Umstand des XIII. Abs. des 40 §. ereignet. Man sucht nähmlich den Quotienten so genau man kann in ganzen Zählen, uud hänket daran einen Bruch, dessen Zähler der

Rest

Rest wie P an a. O. und der Nenner der Divisor ist. So ist 7654 : 37 = 206 + $\frac{32}{37}$ (58).

61. Zus. Es ist erlaubt, die Quotienten wie Brüche zu bezeichnen (58. 59) So ist 7654 : 37 = $\frac{7654}{37}$; welches Zeichen der Division dem im 30. §. erwähnten beyzufügen ist. Und mit einer ganzen Zahl dividiren, heißt so viel, als in einen Bruch multipliciren, dessen Zähler = 1 und der Nenner diese Zahl ist. So ist 45 : 9 = 45. $\frac{1}{9}$ denn $\frac{1}{9}$ mahl nehmen, heißt den neunten Theil nehmen (58).

62. Lehrs. Wenn man den Nenner eines Bruches mit einer ganzen Zahl multipliciret, den Zähler aber ungeändert läßt, so wird der Bruch so viel mahl kleiner, so viel Einheiten die ganze Zahl hat. Denn man theilet die Einheit in so vielmahl mehr Theile, und nimmt von diesen so vielmahl kleinern Theilen nicht mehr als zuvor.

63. Lehrs. Wenn eines Bruches Zähler mit einer ganzen Zahl multipliciret wird, der Nenner aber ungeändert bleibt, so wird der Bruch so vielmahl grösser, so viel Einheiten die Zahl hat. Denn man nimmt mehr Theile, ohne derselben Grösse zu ändern.

64. Zus. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, darf man nur die Zahl in den Zähler des Bruches multipliciren (62) und ihn mit einer ganzen Zahl zu dividiren, darf man nur die Zahl in seinen Nenner multipliciren (63).

65. Lehrs.

65. Lehrs. **Wenn eines Bruches Zähler und Nenner zugleich mit einer ganzen Zahl multipliciret werden, so bleibt die Grösse des Bruchs ungeändert.** Denn die erste Multiplication vergrössert den Bruch so vielmahl, so vielmahl die zweyte den vergrösserten Bruch wieder verkleinert.

So ist $\frac{3 \cdot 5}{4} = 5 \cdot \frac{3}{4}$ nach (62). und $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{4} : 5$

nach (63) also $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = 5 \cdot \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4}$

66. Lehrs. **Wenn der Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl dividiret wird, der Nenner aber ungeändert bleibet, so ist der Bruch mit dieser Zahl dividiret, oder so vielmahl kleiner geworden. Wenn aber der Nenner, mit einer ganzen Zahl, bey ungeänderten Zähler dividiret wird, so ist der Bruch mit dieser Zahl multiplicirt, oder so vielmahl grösser geworden.** Denn im ersten Falle, werden von Theilen, deren Grösse sich nicht ändert, weniger als vorhin, im zweyten von grössern Theilen eben so viel als vorhin von den kleinern genommen.

67. Lehrs. **Wenn Zähler und Nenner eines Bruches zugleich durch eine ganze Zahl dividirt werden, so bleibt die Grösse des Bruches unverändert,** denn die erste Division verkleinert den Bruch so vielmahl, als die zweyte den verkleinerten Bruch wieder vergrössert (66).

So

So ist $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$; denn $\frac{8:4}{12} = \frac{8}{12}:4$ und $\frac{8:4}{12:4} = (\frac{8}{12}:4).\ 4 = \frac{8}{12}$.

68. Zus. Ein Bruch läßt sich nach 65. 67. auf unzählich viel Arten ausdrücken. Und eben so eine ganze Zahl, die man als einen Bruch ansehen kann, dessen Nenner $= 1$; z.E. $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$ u. s. f.

69. Zus. Die Sätze von 62 bis 68 gelten auch, wenn man Divisor, Dividendus, Quotient, statt Nenner, Zähler, Bruch, setzet. (61)

70. Aufgabe. Einen Bruch aufzuheben, d. i. ihn seiner Grösse unbeschadet durch einen kleinern Zähler und Nenner auszudrücken.

Auflös. Man dividire beyde mit einerley Zahl (67).

71. Anm. Es ist also bequem, wenn man Zähler und Nenner in ihre Factoren zerfällt, und die gemeinschaftlichen ausstreichet. $\frac{45}{360} = \frac{5.9}{4.9.2.5} = \frac{1}{4.2} = \frac{1}{8}$.

Ist eine von diesen beyden Zahlen so beschaffen, daß sie keinen Factor als 1 hat (numerus primus) oder haben beyde keinen gemeinschaftlichen Factor (numeri inter se primi) so geht das Aufheben nicht an; oder Zähler und Nenner können nicht beyde ganze Zahlen bleiben.

$\frac{19}{360} = \frac{2\frac{1}{9}}{4} = \frac{4\frac{3}{4}}{9}$ Dieses bedeutet offenbahr, daß man von den neun Theilen des Ganzen, vier, und noch $\frac{3}{4}$ eines solchen Theiles nehmen soll. Wäre das Ganze ein Thaler, und sein neunter Theil $= 4$ Mariengr. so heißt dieß vier Mariengroschen viermahl, und noch $\frac{3}{4}$ von ih-

nen nehmen, oder es gäbe 19 Mgr. wie der Bruch unter der ersten Gestalt gleich anzeigt. So ist ein Bruch zu verstehen dessen Zähler selbst ein Bruch, der Nenner eine ganze Zahl ist; Er bedeutet, daß man von den Theilen des Ganzen die der Nenner zu machen befiehlt, etliche, und noch ein Stück eines solchen Theiles, oder wohl nur das Stück allein nimmt. Wenn die Einheit = 1 Pf. so ist $\frac{3}{32}$ so viel als $\frac{3}{4}$ eines Lothes.

72. Aufg. **Zweene oder mehr Brüche unter eine Benennung zu bringen.**

Aufl. Bey zween Brüchen multiplicire man jedes Zähler und Nenner durch des andern Nenner, so entstehen zweene neue Brüche, die den vorigen gleich sind (65) und einerley Nenner, nähmlich das Product der beyden ersten Nenner haben.

Von den beyden Brüchen $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}$; entstehen $\frac{3.9}{4.9}$; $\frac{5.4}{9.4}$; oder $\frac{27}{36}$; $\frac{20}{36}$;

Bey mehrern Brüchen multiplicire man jedes Zähler und Nenner durch ein Product aus allen übrigen Nennern, so hat jeder der neuen Brüche das Product aus allen Nennern der gegebenen zu seinem Nenner, und ist dem gegebenen, von dem er entstanden ist, gleich.

Von den Brüchen $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{11}$; entstehen $\frac{2.5.11}{3.5.11}$; $\frac{4.3.11}{5.3.11}$; $\frac{7.3.5}{11.3.5} = \frac{100}{165}; \frac{132}{165}; \frac{105}{165}$.

73. Lehrs. Die Summe oder Differenz zweener Brüche, die einerley Nenner haben, ist ein

ein Bruch, dessen Nenner eben derselbe, und der Zähler die Summe oder Differenz jener Zähler ist (53).

So ist $\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ und $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

74. Aufgabe. Zweene oder mehr Brüche zu addiren oder zweene zu subtrahiren.

Aufl. Man bringe sie auf einerley Benennung (72) und addire oder subtrahire die Zähler (73).

Die Summe der drey Brüche des Exempels (72) ist

$$\frac{110 + 132 + 105}{165} = \frac{347}{165} = 2\frac{17}{165} \quad (60)$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{9} = \frac{18 - 15}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

75. Aufgabe. Einen Bruch mit einem Bruche zu multipliciren.

Aufl. Das Product ist ein Bruch, dessen Zähler das Product der Zähler, und der Nenner das Product der Nenner der Factoren ist.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24}$$

Bew. Einen Bruch mit einem andern multipliciren, heißt, von dem ersten ein solches Stück nehmen, als der andere anzeigt. Man muß also den ersten in so viel Theile theilen, als des andern Nenner Einheiten hat, und von diesen Theilen soviel nehmen, als des andern Zähler befiehlt. Jenes geschieht durch die Multiplication der Nenner (62) dieses durch die Multiplication der Zähler (63).

$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{6}$ multipliciren, heißt $\frac{5}{6}$ von $\frac{3}{4}$ nehmen, od.
[illegible] $\frac{3}{4}$ [illegible] (D) Ganz, [illegible] $\frac{5}{6}$ [illegible] Also

Also heißt es

$\frac{3}{4}$ in sechs gleiche Theile theilen; und deren 5 nehmen; das ist

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5$. Aber $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{4.6}$ (62) und $\frac{3}{4.6} \cdot 5 = \frac{3.5}{4.6}$ (63). Man sieht, daß die besondern Grössen dieser Zahlen in die Schlüsse keinen Einfluß haben, und wenn z. E. statt der 5 eine 2 gestanden, diese 2 auch am Ende da, wo jetzt die 5 steht, gekommen seyn würde. Folglich ist der Beweis durch ein solches Exempel geführt allgemein, weil man dabey nichts, das dem Exempel eigen ist, voraussetzt, und die Zahlen nur als Zahlen überhaupt, nicht als bestimmte Zahlen betrachtet. Diesen Vortheil, daß man durch Schlüsse, die ein Exempel erläutert, ohne sie auf sich einzuschränken, einen allgemeinen Beweis führen kann, bringen die Zeichen der arithmetischen Arbeiten, vermittelst deren man nur andeutet, daß etwas mit diesen Zahlen des Exempels geschehen soll, welches mit jeden andern Zahlen eben so geschehen würde. Eben so erhellt, daß der Beweis auch von uneigentlichen Brüchen gilt.

76. Zus. Die Multiplication mit einem eigentlichen Bruche, gibt ein kleineres Product, als der multiplicirte Factor war. Und das Product aus zween eigentlichen Brüchen, ist kleiner als jeder Factor. Auch ist von jedem eigentlichen Bruche, jede höhere Potenz kleiner als die niedrigere (45).

77. Zus. Das Quadrat, oder der Würfel eines Bruches, ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner,

das

das Quadrat oder der Würfel des Zählers und Nenners der Wurzel sind $(\frac{5}{7})^2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7}$ (43) $= \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7}$ (75) $(\frac{4}{9})^3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$ (44) $= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{9 \cdot 9 \cdot 9}$ (75)

Umgekehrt, aus einem Bruche die Quadrat- oder Cubikwurzel ausziehen, heißt einen Bruch machen, dessen Zähler und Nenner Quadrat- oder Cubikwurzeln jenes Zählers oder Nenners sind. Denn $r\frac{4}{6}\frac{9}{4}$ muß eine Zahl seyn deren Quadrat $= \frac{4}{6}\frac{9}{4}$ ist. Aber von $\frac{r49}{r64}$ ist erwiesenermassen das Quadrat $= \frac{4}{6}\frac{9}{4}$ also ist $r\frac{4}{6}\frac{9}{4} = \frac{r49}{r64}$. Eben so muß $\sqrt[3]{r}\,1\frac{8}{2}\frac{}{5}$ eine Zahl seyn, deren Cubus $1\frac{8}{2}\frac{}{5}$ ist; Aber von $\frac{\sqrt[3]{r8}}{3}$ ist der Cubus $1\frac{8}{2}\frac{}{5}$ also $\sqrt[3]{r}\,1\frac{8}{2}\frac{}{5} = \frac{\sqrt[3]{r8}}{r125}$ $\frac{}{125}$

78. Aufg. Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.

Auflös. Man multiplicire den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{1}\frac{}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}\frac{1}{} = \frac{3}{2}\frac{3}{0}$

Beweis. Man will wissen, wievielmahl der Divisor im Dividendus stecke. Hätten nun beyde einerley Nenner, so dürfte man nur suchen, wievielmahl die Zähler in einander steckten (53), d. i. der Quotient würde ein Bruch seyn, dessen Zähler des Dividendus Zähler, und der Nenner des Divisors Zähler wäre (61). Haben also die Brüche

nicht einerley Benennung, so muß man sie dazu bringen. Also wird aus dem gegebenen Divisor und Dividendus ein anderer Divisor und Dividendus, von gleichen Grössen mit den vorigen, aber anders ausgedrückt, und mit einerley Nenner. Ich will jene die ersten, und diese die zweyten nennen. Des zweyten Divisors Zähler ist ein Product aus des ersten Divisors Zähler, in des ersten Dividendus Nenner, und des zweyten Dividendus Zähler ist ein Product aus des ersten Dividendus Zähler, in des ersten Divisors Nenner (72). Der Quotient nun hat zu seinem Zähler den Zähler des zweyten Dividendus, und zum Nenner, den Zähler des zweyten Divisors. Also kömmt sein Zähler heraus, wenn man des ersten Dividendus Zähler mit des ersten Divisors Nenner, d. i. mit dem Zähler des umgekehrten Divisors multiplicirt: Und der Nenner des Quotienten ist ein Product aus dem Nenner des ersten Divisors in den Zähler des ersten Divisors, d. i. in den Nenner des umgekehrten ersten Divisors. Dieser Beweis wird wieder durch ein Exempel erläutert werden, und doch allgemein bleiben. $\frac{3}{4}$, und $\frac{5}{11}$, sind der erste Dividendus, und der erste Divisor. Nun ist $\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3.\ 11}{4.\ 11} : \frac{5.\ 4}{4.\ 11}$ welche beyden letzten Brüche der zweyte Dividendus und Divisor sind. Aber $\frac{3.\ 11}{4.\ 11} : \frac{5.\ 4}{4.\ 11} = \frac{3.\ 11}{4.\ 5} = \frac{3}{4} . \frac{11}{5}$

Man kann die Regel auch so ausdrücken, daß man kreuzweis, mit des Divisors Nenner hinauf

und

und mit seinem Zähler hinunter multipliciret. Da ein Bruch vielmahl in einem andern stecken kann, so kann die Division grosse Zahlen hervorbringen.

79. Aufg. **Mit Zahlen, wo Brüche an Ganzen hängen, zu rechnen.**

Aufl. Man kann die Ganzen nach 68. 72. mit den Brüchen auf einerley Benennungen bringen, und so mit uneigentlichen Brüchen rechnen. Oder man kann auch die vorgeschriebenen Rechnungen nach den gelehrten Regeln mit allen Theilen einer Zahl, die aus ganzen und Brüchen zusammen bestehet, vornehmen, nachdem man es am bequemsten findet.

$(2+\frac{3}{4}) : (7-\frac{5}{6}) = \frac{11}{4} : \frac{37}{6} = \frac{11.6}{4.37} = \frac{11.3}{2.37} = \frac{33}{2.37}$

$(5+\frac{3}{8}) . (4+\frac{2}{7}) = 4.5 + \frac{4.3}{8} + \frac{2}{7} . 5 + \frac{3}{8} . \frac{2}{7}$

$= 20 + \frac{3}{2} + \frac{10}{7} + \frac{3}{4.7} = 20 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{28} =$

$= 22 + \frac{14}{28} + \frac{12}{28} + \frac{3}{28} = 23 + \frac{1}{28}$

80. Also wird im XIII. Abs. des 40 §. wenn man nach 60. verfahren hat, der Dividendus durch die Multiplication des völligen Quotienten mit dem Divisor; oder durch die Addition des Restes zu dem Producte aus dem Divisor in den Quotienten, so weit sich solcher in ganzen Zahlen finden läßt, wieder hergestellt werden. Welches die Probe der Division hier ist.

$17 : 5 = 3 + \frac{2}{5}$; und $3.5 + \frac{2}{5} . 5$ oder $3.5 + 2 = 17$

81. In genannten Zahlen (42) wird oft erfodert, einen Bruch durch die eingeführte Eintheilung des

Ganzen auszudrücken. Man darf in solchem Falle die Einheit nur als eine Menge solcher Theile ansehen, in die man sie abzutheilen pfleget, z. E. $\frac{3}{7}$ Pfund $= \frac{3}{7}$. 32 Loth $= 13\frac{5}{7}$ Loth und $\frac{5}{7}$ Loth $= \frac{5}{7}$. 4 Quentchen $= 2\frac{5}{7}$ Quentchen.

82. Anm. Es ist nöthig zu zeigen, daß einige Sätze, die oben von ganzen Zahlen dargethan sind, auch von Brüchen gelten. Die meisten Schriftsteller nehmen solches ohne Beweis und meines Erachtens zu übereilt an.

83. Lehrs. Der Satz (10) ist auch von Brüchen wahr.

Sein erster Theil steht schon im Beweise von (75). Der zweyte Theil erhellt so: $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4}$ (75) aber $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$ und $6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$ (10) also $\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}$ oder $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$.

Bey Brüchen, wie (71) am Ende darstellt, bleibt eben der Beweis:

$\frac{\frac{5}{6}}{3} \cdot \frac{11}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 11}{3 \cdot \frac{2}{7}}$ und es erhellt, daß eben das Product herauskommen müsse, wenn man die Ordnung der Factoren veränderte. Man kann nähmlich solche Brüche allemahl auf andere, wo Zähler und Nenner lauter ganze Zahlen sind, bringen. Die jetzigen wären $\frac{5}{168}$ (62) und $\frac{77}{2}$ (78).

84. Lehrs. Der Satz (16) ist auch von Brüchen wahr.

Bew.

Bew. $(\frac{3}{7} : \frac{5}{11}) \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{11}$ (78) aber $\frac{11}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{11.5}{5.11}$ (76) $= 1$ (10)

Ferner ist $(\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{5}) : \frac{2}{5} = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}$ (78) und $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} =$ 1 (76. 10)

85. Lehrs. Die Sätze von (61...69.) sind auch wahr, wenn man statt der dorten genannten ganzen Zahlen Brüche setzt.

Bew. für 61. Wenn man einen Bruch $\frac{3}{4}$ mit einer ganzen Zahl 32 dividirt, so nimmt man den Theil von ihm den die ganze Zahl anzeigt, das ist es kömmt ein Bruch heraus dessen Nenner die ganze Zahl, der Zähler der Bruch den man dividirt ist wie hier $\frac{\frac{3}{4}}{32}$. Die Bedeutung solcher Brüche erklärt (71).

Sollte man nun $\frac{3}{4}$ mit $\frac{32}{5}$ dividiren, so müßte der nunmehrige Quotient wohl so vielmahl grösser werden als der vorige, so vielmahl der nunmehrige Divisor kleiner ist als der vorige; Z. E. hier fünfmahl. Der vorige Quotient aber war ein Bruch, der fünfmahl grösser wird, wenn man seinen Nenner fünfmahl kleiner macht (66) das ist wenn der Nenner $\frac{32}{5}$ statt der vorigen 32 wird. Also ist der nunmehrige Quotient der Bruch $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{32}{5}}$ wie 61 von ganzen Zahlen lehrte.

Was soll man aber bey einem solchen Bruche denken, der im Ganzen eine Menge von Theilen voraussetzt, die sich nicht durch eine ganze Zahl

ausdrücken läßt? als hier in $\frac{3}{5}^2$ Theile? Dieses: auf das Ganze sollen so viel Theile gehen, als des Quotienten Nenner $\frac{3}{5}^2$ anzeigt, nähmlich $6\frac{2}{5}$. Das heißt so viel: Ein Theil von denen die man jetzo macht, soll $\frac{3}{5}^2$ oder $6\frac{2}{5}$ eines 32 Theils enthalten. Ohne Zweifel läßt sich ein 32 Theil, sechsmahl, und noch zwey Fünftheile von ihm nehmen. Was auf diese Art herauskömmt, davon nehme man $\frac{3}{4}$ so hat man den nunmehrigen Quotienten.

In genannten Zahlen läßt sich dieses noch mehr erläutern. Wäre die Einheit bey dem Exempel ein Pfund, davon $\frac{1}{3}^2 = 1$ Loth, so befähle der Ausdruck, von einem Lothe $\frac{3}{5}^2$, das ist $6\frac{2}{5}$ Loth zu nehmen; davon $\frac{3}{4}$ wären der nunmehrige Quotient.

Bey dem Bruche $\frac{17\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$ sey die Einheit, das Julianische Jahr $= 365\frac{1}{4}$ Tage; so bedeutet der Bruch, $17\frac{1}{2}$ Tage.

Ein Bruch dessen Zähler und Nenner selbst Brüche sind, ist also der Quotient den der Zähler mit dem Nenner dividirt giebt, und folglich kann man ihn nach 78 bequemer ausdrücken.

Der vorhin so genannte nunmehrige Quotient ist

$\frac{3}{4} : \frac{3}{5}^2 = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 32}$

Hieraus fließt gleich der zweyte Satz in 61; daß nähmlich mit $\frac{5}{7}$ dividiren, so viel heißt als in einen Bruch multipliciren, dessen Zähler $= 1$ der Nenner $= \frac{5}{7}$ wäre. Denn wenn man 1 als einen Bruch

$= \frac{1}{1}$

$= \frac{1}{1}$ ausdrückt, so erhellet, aus dem nur erwähnten, daß der nur beschriebene Bruch $\frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{1}{1} : \frac{5}{7} = \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{5}$ (78). Mit ihm also multipliciren, heißt mit $\frac{7}{5}$ multipliciren, das ist mit $\frac{5}{7}$ dividiren (78).

Für 62. Man multiplicire von $\frac{2}{3}$ den Nenner mit $\frac{5}{7}$; ich sage, das sey so viel als $\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{7}$ dividiren. Denn

$$\frac{2}{\frac{3 \cdot 5}{7}} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}} (75) = \frac{2}{3 \cdot 5 : 7} (61) = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot 7 \ (66)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 7 \ (75) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} \ (75) = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} \ (78).$$

Für 63. $\frac{2 \cdot \frac{5}{7}}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}}{3}$ (64)

$$= \frac{2 \cdot 5 : 7 \cdot}{3} \ (61) = \frac{2 \cdot 5}{3} : 7 \ (66) = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} \ (64)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \ (75).$$

Also kann man auch in 64. 65. statt ganze Zahl nunmehr Bruch setzen. Denn diese beyden Sätze sind so allgemein wahr, als die, aus welchen sie fliessen.

Für 66. $\frac{2 : \frac{5}{7}}{3} = \frac{2 \cdot \frac{7}{5}}{3} (78) = \frac{2 \cdot 7 : 5}{3} (75.61)$

$$= \frac{2 \cdot 7}{3} : 5 \ (66) = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} \ (64)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} \ (75) = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} \ (78)$$

$$\frac{2}{3 : \frac{5}{7}} = \frac{2}{\frac{3 \cdot 7}{5}} (78) = \frac{2}{3 \cdot 7} \cdot 5 \ (66)$$

$$= \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} (63) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \ (75).$$

Also sind die folgenden Sätze der Lehre von den Brüchen und den ihnen gleichgültigen Quotienten

alle

alle noch wahr, wenn man statt der ganzen Zahlen, die dorten genannt werden, Brüche braucht.

86. Es gibt Grundsätze, die man der Rechenkunst insgemein voranzusetzen pflegt. Die natürliche Arithmetik lehret sie jeden Menschen in besondern Fällen brauchen, wo er sie nöthig hat, ihr allgemeiner Ausdruck aber gibt ihnen für den Schüler der Rechenkunst ein geheimnißvolles Ansehen. Ich habe sie dieserwegen anfangs nicht ausdrücklich hinschreiben wollen, einen ausgenommen (Vorerinn. 8.) damit aber doch der Rechenkunst, und den Gründen der ganzen übrigen Mathematik nicht etwas so wichtiges zu fehlen scheine, so sind sie hier. Sie werden sich nun kurz fassen und leicht verstehen lassen.

87. Jede Grösse ist sich selbst gleich. Zwo Grössen, die einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich. Was grösser oder kleiner ist als eine von zwo gleichen Grössen, ist auch grösser oder kleiner als die andere.

88. Gleiches zu gleichen addirt, von gleichen abgezogen, mit gleichen multiplicirt, oder dividirt; gibt gleiches. Gleiches zu ungleichen Dingen addirt, davon abgezogen, damit multiplicirt, oder darein dividirt, gibt bey dem grössern mehr als bey dem kleinern. Das Grössere zum Gleichen addirt oder damit multiplicirt, gibt mehr als das kleinere; aber abgezogen, oder in das gleiche dividirt, weniger.

89. Lassen sich Grössen von einerley Art, d. i. Grössen, deren eine ein Theil der andern seyn kann,

so

so vergleichen, daß man untersucht, wie vielmahl die eine in der andern ganz enthalten sey, oder daß man beyde mit einem gemeinschaftlichen Stücke ausmißt; so kann man sie allemahl als Zahlen ansehen, und dieses unterwirft alle Grössen, die sich dergestalt messen lassen, der Rechenkunst, und verstattet die Lehren von den Zahlen auf alle solche Grössen anzuwenden. Die genannten Zahlen (42) sind Exempel davon.

Von den entgegengesetzten Grössen.

90. Erkl. Entgegengesetzte Grössen heissen Grössen von einer Art, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß die eine die andere vermindert. Z. E. Vermögen und Schulden, Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen. Eine von diesen Grössen, welche man will, heißt man positiv oder bejahend, die ihr entgegengesetzte negativ oder verneinend.

91. Zus. Es ist willkührlich, welche von beyden man bejahend nennen will. Schulden sind ein verneinendes Vermögen, und Vermögen kann als verneinende Schulden angesehen werden.

92. Zus. Man kann die verneinende Grösse als etwas, das von der bejahenden abgezogen werden muß, ansehen, und also mit dem Zeichen — bezeichnen, wenn die bejahende + hat. So machen 3 Rthlr. Schulden und 7 Rthlr. Vermögen zusammen + 7 — 3 Rthlr. Vermögen. Eben so aber

würden

würden 3 Vermögen, und 7 Schulden zusammen + 7 — 3 Schulden machen.

93. Zus. Die verneinende Grösse kann die bejahende übertreffen. In diesem Falle sollte mehr abgezogen werden als vorhanden ist, (92) das heißt, die bejahende Grösse verzehret so viel, als sie beträgt in der verneinenden, und bleibt noch etwas von der verneinenden mit ihrem Zeichen übrig, 7 Vermögen und 10 Schulden machen 7 — 10 Vermögen, d. i. — 3 Vermögen.

94. Zus. Dieses Negative, das übrig bleibt, ist eine wirkliche Grösse, nur der, die als positiv betrachtet wird, entgegengesetzt. Z. E. 3 Thl. Schulden sind ohne Zweifel etwas wirkliches, und können als Schulden betrachtet positiv genannt werden; Nur als Vermögen angesehen sind sie negativ, d. i. dem Vermögen entgegengesetzt; Eine negative Grösse heißt also weiter nichts, als eine Grösse, die man als die ihr entgegengesetzte betrachtet, und dieses durch die Verneinung anzeiget. Will man Schulden als Vermögen betrachten, so muß man sie als etwas dem Vermögen entgegengesetztes, als verneinendes Vermögen betrachten.

95. Zus. Wenn man zu einer verneinenden Grösse, die ihr gleiche bejahende setzet, so heben beyde einander auf und geben zusammen o. So ist — 3 + 3 = o oder: wer drey Thaler schuldig war, und 3 Thl. baar Geld bekömmt, der muß damit die Schulden bezahlen, und hat alsdenn

Nichts.

Nichts. Man kann also von ihm sagen, er habe zuvor weniger als Nichts gehabt, weil er nun erstlich nichts hat, nachdem er etwas bekommen hat. In diesem Verstande kann man eine verneinende Grösse weniger als nichts nennen; sie ist nähmlich weniger als nichts in Absicht auf die entgegengesetzte. Wenn eine ihr gleiche entgegengesetzte zu ihr kömmt, so ist alsdenn nichts von der Entgegengesetzten vorhanden, und es fehlet ihr also noch etwas, um Nichts von der entgegengesetzten zu werden. An sich selbst aber ist jede verneinende Grösse mehr als Nichts, weil sie eine wirkliche Grösse ist. Dieser Ausdruck weniger als nichts, setzt also eine Bedeutung des Wortes Nichts zum voraus, die sich auf eine gewisse Art das Etwas zu betrachten beziehet (nihilum relatiuum) welche sich von dem Nichts ohne Beziehung genommen (nihilum absolutum) unterscheiden liesse, eine Eintheilung des Nichts, die ein gewisser deutscher Philosoph, der alles haarklein einzutheilen gewohnt ist, und es als einen Fehler der mathematischen Methode ansieht, daß die Divisionen bey ihr mangelten, nicht würde vergessen haben, wenn sich seine Kenntniß in der Mathematik bis auf diese Sätze erstreckt hätte. Nimmt man den Ausdruck weniger als nichts nicht in diesem Verstande, so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Grössen verführet. In der gehörigen Bedeutung aber hat er seinen Nutzen, z. E. bey den Grundsätzen (88).

Die

Die Rechnung mit entgegengesetzten Grössen.

96. Aufg. Entgegengesetzte Grössen zu addiren.

Aufl. Man nehme die kleinere aus der grössern weg, und schreibe vor das, was übrig bleibt, das Zeichen der grössern. Denn eine hebt so viel, als sie beträgt, in der andern auf, und also bleibt etwas von der grössern übrig.

So sind + 6 und — 5 zusammen = + 1 aber + 4 und — 7 zusammen — 3

Kommen verschiedene verneinende und bejahende Grössen vor, so ist es bequem, jede Classe zusammen zu rechnen, und alsdenn zu sehen, was die Summen beyder Classen zusammen geben.

Exempel
$$\begin{array}{r} +6-5 \\ +8-9 \\ +11-3 \\ \hline +25-17=+8. \end{array}$$

97. Lehrs. Wenn eine Grösse aus zwey Stücken bestehet, da das zweyte von dem ersten abgezogen ist, so heißt diese ganze Grösse von einer andern abziehen, so viel als das erste Stücke abziehen und das zweyte addiren.

$$12-(15-19)=12-15+19=+16$$

Denn wenn man das erste Stück abzieht, so hat man zu viel abgezogen, man sollte nähmlich nur

das

das erste weniger dem zweyten abziehen. Also muß man das zweyte, das man zuviel abgezogen hat, wieder addiren.

98. Lehrs. Eine Grösse abziehen, heißt die ihr entgegengesetzte addiren.

Denn die Entgegengesetzte ist so viel als die Grösse selbst abgezogen (92). Von bejahenden Grössen, ist dieses klar. Niemand zweifelt, daß 4 von 7 abgezogen so viel als 7 - 4 das ist die 4 welche positiv war verneinend genommen, und so zu der 7 addirt (96) sey. Aber wird wohl eben das bey negativen statt finden? wird − 4 von + 7 abziehen so viel seyn als + 4 zu + 7 addiren? Man kann dieses gleich daraus sehen, weil die verneinende als bejahend angesehen werden kann, wenn man die ihr entgegengesetzte verneinend nennet (91). Wie also der Abzug einer bejahenden Grösse ihr Zeichen in das entgegengesetzte verneinende verwandelt, so muß der Abzug der verneinenden, ihr Zeichen in das entgegengesetzte bejahende verwandeln.

Anderer Beweis. Man stelle sich die Grösse, von welcher der Abzug geschehen soll, so vor, daß sie ungeändert bleibet, und doch die Grösse, welche man abziehen soll, als einen Theil enthält. Dieses geschiehet, wenn man die Grösse, die man abziehen soll mit dem Zeichen, das sie hat, und auch mit dem entgegengesetzten, zu der Grösse setzet, von welcher der Abzug geschehen soll. Dieser Abzug wird also geschehen, wenn man von der solcherge-

stalt ausgedruckten Grösse den Theil, den man abziehen soll, wegnimmt. Also bleibt eben dieses, das man abziehen sollte, mit dem entgegengesetzten Zeichen stehen.

Man soll − 4 von + 7 abziehen. Man drücke also + 7 so aus, daß − 4 ein Theil davon ist, nähmlich + 7 = + 7 − 4 + 4. Von der solchergestalt ausgedruckten + 7 nehme man − 4 weg, so bleibt + 7 + 4 also ist + 7 − (−4) = + 7 + 4

99. Anm. Wenn die Grösse, die man abziehen soll, aus einer bejahenden und einer verneinenden bestehet, so läßt sich der Beweis aus (97) herleiten; wie einige Schriftsteller gethan haben: Alsdenn aber muß man für den Fall, da eine negative Grösse z. E. - 4 allein abgezogen werden soll, sie folgendermassen o - 4 ausdrücken, welches mir wegen der Erinnerung (96) mißfällt.

100. Aufgabe. **Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen, von einander abzuziehen.**

Auflös. Man verwandele in der Grösse, die man abziehen soll, das Zeichen jeden Theiles in das entgegengesetzte, und addire nach dieser Verwandelung (98).

12 − 7 − (8 - 9) = 12 − 7 − 8 + 9

101. Lehrs. **Wenn man mit entgegengesetzten Zahlen rechnet, so ist es verstattet, die Einheit bejahend anzunehmen.**

Denn wie alsdenn die bejahenden Zahlen Mengen dieser Einheit oder ihrer Theile sind, so sind die verneinen-

neinenden Zahlen, Mengen des Entgegengesetzten dieser Einheit. Nähme man sie verneinend an, so würden die bejahenden Zahlen Mengen ihres Entgegengesetzten, und da solches also entweder bey bejahenden oder bey verneinenden geschehen muß, so ist es willkührlich, bey welchen man es annehmen will.

102. Lehrs. **Eine bejahende Grösse mit einer verneinenden multipliciret, gibt ein verneinendes Product.**

Denn das Product soll die verneinende Grösse so vielmahl enthalten, als die bejahende die Einheit enthält (8. 75); Aber der bejahende Factor, ist die bejahende Einheit (101) selbst etliche mahl, oder einige Theile von ihr genommen. Also ist auch das Product, so viel als der verneinende Factor selbst etliche mahl oder einige Theile von ihm genommen, d. i. es ist verneinend.

So heißt + 7 mit − 3 multipliciren, ein Product finden, darinnen − 3 so vielmahl steckt, als + 1 in + 7; dieses Product also muß − 21 seyn.

103. Lehrs. **Eine verneinende Grösse mit einer bejahenden multiplicirt gibt ein verneinendes Product.**

Denn die verneinende wird solchergestalt etliche mahl genommen, welches ohnstreitig etwas verneinendes ist. Sie steckt nähmlich in dem Producte so vielmahl, so vielmahl die bejahende Einheit (101) in dem bejahenden Factor steckt (8. 75). Nun steckt

die bejahende Einheit selbst, und nicht ihr Entgegengesetztes in dem bejahenden Factor, also muß auch der verneinende Factor selbst in dem Producte stecken; das ist, das Product muß verneinend seyn; denn wäre es bejahend, so enthielte es das Entgegengesetzte des verneinenden Factors.

So heißt -7 mit $+3$ multipliciren, die -7 dreymahl nehmen. Soll aber in dem Producte die -7 dreymahl enthalten seyn, so muß es -21 heissen: denn in $+21$ wäre das Entgegensetzte von -7 dreymahl enthalten.

104. Anm. Wenn die verneinende Grösse eine bejahende vor sich hat, ist dieser Satz leicht, wie (97) zu erweisen.

$$(12-7).3 = 3.12 - 3.7$$

105. Lehrs. Zwo verneinende Grössen mit einander multipliciret, geben ein bejahendes Product.

Denn das Product enthält den einen verneinenden Factor so vielmahl, als der andere die Einheit. Aber die Einheit steckt in diesem Factor nicht selbst, sondern ihr Gegentheil (101). Also steckt auch der übrige verneinende Factor nicht selbst, sondern sein Gegentheil in dem Producte, d. i. das Product ist bejahend.

Wenn man -7 mit -3 multiplicirt, so soll -7 in dem Producte so vielmahl stecken als $+1$ in -3. Es steckt aber das Gegentheil der $+1$ in der -3 dreymahl, also steckt auch das Gegentheil der -7,

das ist + 7 in dem Producte dreymahl, welches Product also + 21 seyn muß.

106. Lehrs. Zweene positive Factoren geben ein positives Product.

Dieses wird von jederman ohne Beweis angenommen, und erhellet leicht daraus, weil der eine Factor die Einheit selbst etliche mahl enthält, und also der andere auch selbst etliche mahl im Product enthalten seyn muß.

107. Anm. Nähme man die Einheit verneinend an, so würde das Product in (105) und (106) verneinend. Alsdenn wären nähmlich nur die verneinenden und bejahenden Grössen verwechselt (91).

108. Lehrs. Einerley Zeichen beyder Factoren geben in der Multiplication + und verschiedene —.

Erhellet aus 102. 103. 105. 106.

109. Aufg. Grössen, die aus entgegengesetzten zusammengesetzt sind, zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire wie gewöhnlich jeden Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern, und setze die Zeichen nach 108.

Ex. $+5-4+9=10$
$+7+6-8=5$

$$\left.\begin{array}{l} +5.7-4.7+7.9 \\ +5.6.-4.6+6.9 \\ -5.8+4.8.-9.8 \end{array}\right\} = 50$$

110. Lehrs. Wenn der Divisor und der Dividendus entgegengesetzte Zeichen haben, so ist der Quotient negativ.

Denn es steckt alsdenn der Divisor nicht selbst, sondern sein Entgegeng setztes im Dividendo, also steckt auch nicht die Einheit selbst, sondern ihr Entgegengesetztes im Quotienten.

$\frac{+12}{-3} = -4$; denn -3 steckt nicht selbst viermahl in $+12$ sondern ihr Entgegengesetztes $+3$; also kann auch nicht $+1$ selbst viermahl im Quotienten stecken, sondern -1.

111. Lehrs. Wenn Divisor und Dividendus einerley Zeichen haben, so ist der Quotient positiv.

Denn alsdenn steckt der Divisor selbst, und nicht sein Entgegengesetztes im Dividendo; also auch die Einheit selbst im Quotienten. So ist -3 selbst 4 mahl in -12 enthalten.

112. Lehrs. Einerley Zeichen geben bey der Division $+$ verschiedene $-$

Erhellet aus 110. 111.

113. Aufg. Grössen mit verschiedenen Zeichen zu dividiren.

Aufl. Die Division geschieht wie gewöhnlich, nur die Zeichen nach 112 bestimmt.

$$\frac{100 - 25}{5} = 20 - 5 = 15$$

II. Capitel.

Die Buchstabenrechnung.

1. Willk. Satz. Eine Zahl überhaupt anzudeuten, bediene man sich eines Buchstabens. Die Veränderungen, die mit den Zahlen vorgenommen werden, drücke man durch die bisher schon gebrauchten Zeichen aus, nur zeige man die Multiplication auch dadurch an, daß man die beyden Factoren, ohne einen Punct dazwischen zu setzen, neben einander schreibt; weil die Buchstaben nicht wie die Zifern einen Wehrt von ihrer Stelle bekommen.

So heißt das Product aus zwo Zahlen überhaupt a. b oder ab; Es sey $a=3$, $b=4$ so heißt es $3.4=12$; Wenn $a=7$ $b=9$, so heißt es $7.9=63$, und so stellt dieser Ausdruck ab alle mögliche Producte; der $c+d$ alle mögliche Summen, der $e-f$ alle Differenzen; der $g:h$ oder $\frac{g}{h}$ alle Quotienten vor. Die Buchstaben können zwar so wohl ganze Zahlen als Brüche, ja eine dritte Art von Zahlen, von denen wir jetzo noch keinen Begrif geben können, bedeuten. Aber zu der gegenwärtigen Absicht wird es meistens genug seyn, sie als Zeichen ganzer Zahlen zu betrachten. Indessen bleiben die Regeln ihrer Rechnung allgemein, wenn diese Regeln nichts voraussetzen, das die Bedeutung der Buchstaben auf ganze Zahlen einschränkte.

Anm. Dergleichen Einschränkung ist wenn man jede gerade Zahl mit $2m$; jede ungerade mit $2n+1$ bezeichnet, wo m, n, ganze Zahlen bedeuten müssen.

2. Zus. Weil jeder Buchstabe, jede Zahl bedeuten kann, so lassen sich zweene Buchstaben überhaupt, ohne weitere Bestimmungen nicht mit einander vergleichen. Aber wenn einerley Buchstabe einmahl mit dieser bestimmten Zahl, das andere-mahl mit einer andern multipliciret ist, so läßt sich eine Vergleichung zwischen beyden diesen Producten anstellen. Z. E. 200 c ist viermahl soviel als 50 c; und 7 d + 12 d = 19 d; c und d mögen seyn was sie wollen.

3. Aufg. Ausdrückungen, in denen verschiedene Buchstaben, mit verschiedenen Zeichen zusammengehenkt befindlich sind, zu addiren oder zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Theile der Ausdrückungen unter einander, die einerley Buchstaben enthalten, und verfahre nach I. 96. 100. und II. 2.

Exempel der Addition.

$$\begin{array}{r} +\ 7a + 4b - 3c - 4d = A \\ +\ 2a - 5b - 4c + 6d = B \\ \hline +\ 9a - b - 7c + 2d = C \end{array}$$

Exempel der Subtraction.

$$\begin{array}{r} +\ 17a - 12b + 8c - 9d = D \\ +\ 2a + 8b - 3c - 11d = E \\ \hline +\ 15a - 20b + 11c + 2d = F \end{array}$$

4. Anm. Wenn man a, b, c, d, jedes eine bestimmte Einheit, z. E. Centner, Pfunde, Lothe, Quentchen gelten läßt,

läßt, so kann man dadurch sich diese Rechnung erläutern, und sehen, daß eben das herauskömmt, wenn man dergleichen Exempel auf die gewöhnliche Art rechnete. Z. E. in diesem Falle wäre a = 100 b, b = 32 c, c = 4 d; so ist A = 90096 Quentchen, B = 24950, also A + B = 115046 = C Auch D = 216087; E = 26601; also D - E = 189486 = F. Die mühsame Reduction der grössern Einheiten auf die geringern, wird durch die Rechnung mit den entgegengesetzten Grössen ersparet, daher dieses Verfahren selbst bey vielen Rechnungen, die im gemeinen Leben vorkommen, mit Bequemlichkeit gebraucht wird.

5. Aufg. Bey Ausdrückungen wie (3) die Multiplication zu verrichten.

Auflös. Man multiplicirt jeden Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern, mit Beobachtung der Zeichen nach I. 108.

I. Ex.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

II. Ex.
$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

III. Ex.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2 \end{array}$$

Das erste Exempel wird unten gebraucht werden. Das letzte zeigt, wie bequem diese Rechnung ist, allgemeine Lehrsätze zu finden, und kurz auszudrücken. Es heißt nähmlich: die Summe zwoer Zahlen mit

ihrer Differenz multipliciret gibt die Differenz ihrer Quadrate. Z. E. $17.3 = 51 = 10^2 - 7^2$

6. Aufg. Bey Ausdrückungen wie (3) die Division zu verrichten.

Aufl. Wenn der Divisor und Dividendus gemeinschaftliche Factoren haben, so streiche man solche aus beyden weg (l. 69.) sonst aber deute man die Division nur durch das gehörige Zeichen an. Das Zeichen des positiven und negativen bestimmt sich aus l. 112. ausführlichere Regeln der Division sind hier unnöthig.

$$\frac{ab - cd}{bc} = \frac{ab}{bc} - \frac{cd}{bc} = \frac{a}{c} - \frac{d}{b}$$

7. Aufg. **Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu multipliciren.**

Aufl. Weil der Exponente jeder Potenz (l. 46) die Zahl der Factoren in ihr anzeigt, so sind in dem Producte so viel Factoren, als beyde Exponenten zusammen anzeigen, also ist es eine Potenz, deren Exponent die Summe der Exponenten der Factoren ist.

$$a^2 . a^3 = aa . aaa = a^5$$

$$b^m . b^n = b^{m+n}$$

8. Zus. $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ und überhaupt $(x^m)^n = x^{mn}$

9. Zus.

9. Zus. $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$ denn $(c^{\frac{1}{2}})^2 = c$ (8.) und $\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

10. Aufg. Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu dividiren.

Aufl. Weil sich in dem Dividendus so viel Factoren aufheben als der Divisor hat, so bleiben im Quotienten so viel Factoren des Dividendus stehen, so viel der Dividendus mehr hat als der Divisor; der Quotient ist also eine Potenz, deren Exponente herauskömmt, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus abzieht.

$$\frac{e^5}{e^3} = \frac{e.\ e.\ e.\ e.\ e}{e.\ e.\ e} = e.\ e = e^{5-3}$$

$$y^m : y^n = y^{m-n}$$

11. Zus. $a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0 = 1$; und überhaupt $x^0 = 1$.

12. Zus. Wenn des Divisors Exponent grösser ist als der Exponent des Dividendus, so wird des Quotienten Exponent negativ. Aber der Quotient ist alsdenn ein Bruch dessen Zähler 1 der Nenner eine Potenz von eben dem positiven Exponenten ist. Also bedeuten Potenzen mit verneinenden Exponenten so viel als Brüche.

$\frac{a^3}{a^7}$ wird nach der Regel $= a^{-4}$; Es ist aber $= \frac{1}{a^4}$; also sind diese beyden Ausdrückungen gleichgültig.

13. Zus. $a^{+m} \cdot a^{-n} = a^{m-n}$ (7. 10).

$a^{+m} : a^{-n} = a^{m-n}$ 14. Aufg.

14. Aufg. Ein Product ab auf die Potenz $\overset{\text{M. s}}{m}$ erheben.

Aufl. Dieses heißt ein Product aus $\overset{s}{m}$ Factoren machen, deren jeder $=ab$ ist, das also ab. ab. ab---. seyn wird. In diesem Producte kömt also m mahl der Factor a, u. eben so vielmahl der Factor b vor; das erste giebt a^m, das andere b^m; Folglich ist $(ab)^m = a^m b^m$.

15. Zus. $\overset{n}{r}cd = \overset{n}{r}c. \overset{n}{r}d$, denn vermöge (14) ist $(\overset{n}{r}c. \overset{n}{r}d)^n = (\overset{n}{r}c)^n . (\overset{n}{r}d)^n = cd$.

16. Aufg. Einen Bruch oder Quotienten (I. 61) $\frac{e}{r}$ auf die Potenz m zu erheben.

Aufl. Man muß ein Product aus m Factoren machen, deren jeder $= \frac{e}{r}$ ist. Das giebt also (I. 75.) im Producte einen Zähler der aus m Factoren $= e$; und ein Nenner der aus eben so viel Factoren $= r$ besteht, folglich ist $\left(\frac{e}{r}\right)^m = \frac{e^m}{r^m}$

17. Zus. $\left(\frac{\overset{n}{r}x}{\overset{n}{r}y}\right)^n = \frac{(\overset{n}{r}x)^n}{(\overset{n}{r}y)^n} = \frac{x}{y}$; Also ist $\overset{n}{r}\frac{x}{y} = \frac{\overset{n}{r}x}{\overset{n}{r}y}$.

Von 16; 17; ist I. 77. ein Exempel.

III. Ca=

III. Capitel.

Die Rechnung mit zehntheilichen und sechszigtheiligen Brüchen.

1. Erkl. Ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz der 10 ist, heißt ein zehntheilicher Bruch. Als $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{7}{1000}$; Man nennt sie Zehntheile, Hundertheile, Tausendtheile.

2. Zus. Nach dem Gesetze der decadischen Arithmetik (I. 24) bedeutet eine Zifer, die der Stelle der Einer zunächst zur rechten Hand stehet, Zehntheile, die dieser zur rechten Hand stehet, Hundertheile u. s. f. Jede Zifer nähmlich bedeutet einen Bruch, dessen Zähler die Zifer anzeiget, und dessen Nenner eine Potenz der 10 ist, deren Exponent so viel Einheiten hat, als die Zahl, welche anzeiget, die wievielte die Stelle der Zifer von der Stelle der Einer ist. Oder, welches eben das ist, der Nenner ist eine 1 mit so viel Nullen, als die Zahl Einheiten hat, welche anzeiget, die wievielte die Zifer von der Stelle der Einer ist. Die Stelle der Einer muß also mit einem Zeichen bemerkt werden; dazu ich ein, gebrauchen will, andere brauchen auch einen . Hat man keine Zahl in der Stelle der Einer anzuzeigen, so muß man eine o dahin schreiben.

Die Brüche im Exempel (1) werden so geschrieben: 0, 347

3. Aufg. Einen eigentlichen Bruch in zehntheilichen Brüchen auszudrücken.

Aufl. Man henke an den Zähler so viel Nullen, auf so viel Zifern man die zehntheilichen Brüche suchen will, und dividire gewöhnlicher maassen.

$\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$; $\frac{1}{4} = \frac{1,00}{4} = 0,25$;

$\frac{1}{8} = \frac{1,000}{8} = 0,125$; $\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$

$\frac{1}{24} = 0,041666666\ldots$

$\frac{1}{288}$ $0,00347222\ldots$

Die letzten beyden Ausdrückungen, stellen den ggr. und Pfennig in Decimaltheilen des Thalers vor.

4. Zus. Ein uneigentlicher Bruch, (I. 56.) oder ein Quotient wie (I. 60.) läßt sich in ganzen Zahlen und zehntheilichen Brüchen ausdrücken.

$\frac{17}{3} = 5,66666\ldots$

5. Zus. Man kann einen Bruch nicht allemahl genau in Zehntheilchen ausdrücken, aber sich allezeit seinem wahren Werthe so weit nähern als man will; in welcher Absicht man annehmen muß, daß sich die Einheit ohne Ende forttheilen lasse.

6. Zus. Man kann die Zifern, die zehntheiliche Brüche andeuten, als schlechte Einer ansehen, die in Potenzen der 10 deren Exponenten verneinend sind, multiplicirt wären. (II. 12.) Der Exponente ist nähmlich eine verneinende Zahl von so viel Einheiten als die Zahl enthält, welche anzeiget, die wievielte die Zifer von der Stelle der Einer ist.

Dieses

Dieses läßt sich mit I. 51. vergleichen, wo man den Einer selbst, als in 10° multiplicirt ansehen kann (II. 11).

$$532,6417 = 5.10^{2} + 3.10^{1} + 2.10^{0} + 6.10^{-1} + 4.10^{-2} + 1.10^{-3} + 7.10^{-4}$$

7. Zus. Deutet man also die Ordnung der Zifern, die ganze Zahlen anzeigen, nach I. 51. mit bejahenden Zahlen an, so wird die Ordnung der Zifern die zehntheilige Brüche anzeigen, durch verneinende angedeutet.

So hiesse das vorige Exempel $\begin{matrix} + & 2 & + & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ & 5 & & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 7 \end{matrix}$

8. Erkl. Der Exponent einer Zifer, heißt die Zahl, welche ihre Stelle anzeigt. Er muß von dem Exponenten der Potenz (I. 46.) unterschieden werden, und ist für ganze Zahlen bejahend, für zehntheiliche Brüche verneinend (7).

9. Lehrs. Das Product zwoer Zifern von verschiedenen Ordnungen, hat zum Exponenten seiner niedrigsten Zifer, die Summe der Exponenten der Factoren.

Bew. Für ganze Zahlen ist der Satz (I. 38.) bewiesen.

Man multiplicire also eine ganze Zahl mit einem Decimalbruche, z. E. 300 mit 0,000005, d. i. man mache das Product $\begin{matrix} + & 2 & -6 \\ & 3. & 5; \end{matrix}$ dieses ist so viel als

$3.10.^{2}\ 5.\ 10^{-6}$ (7. 6.) $= 3.5.10^{2}.10^{-6} = 3.5.10^{-4}$ (III. 13.) $= 15^{-4}$ (7). So ist wenn a, b,

zwo

zwo Zifern, jene von der Ordnung + m, diese von der Ordnung −n bedeuten $a.\ 10^{+m}$ $b = a.\ 10^{-n}$ $b.\ 10^{-n} = ab.\ 10^{m-n}$ welches das Product ab von der Ordnung m-n gibt, wo n & m also der Exponent der Ordnung verneinend ſeyn kann. Wenn auch m verneinend iſt, d. i. wenn ein Decimalbruch mit einem Decimalbruche multipliciret wird, ſo iſt der verneinende Exponente des Products ſo groß als die beyden verneinenden Exponenten der Factoren zuſammen. Z. E. $3.\ 2 = 6.$ $^{-5}\ ^{-3}\ \ ^{-8}$ Folglich iſt eines Decimalbruches von der Ordnung -n, ſein Quadrat von der Ordnung -2n und ſein Würfel von der Ordnung -3n; Oder: das Product zweener Decimalbrüche, enthält ſo viel Decimalſtellen zur rechten der Stelle der Einer, als beyde Factoren zuſammen enthalten. Und das Quadrat eines Decimalbruches zweymahl, der Würfel dreymahl ſo viel als die Wurzel.

10. Anm. Die Beweiſe laſſen ſich erläutern, wenn man die Decimalbrüche mit ihren Nennern ausdruckt. So heißt das erſte Exempel

$300.\frac{5}{100000} = \frac{1}{10000}$ und das zweyte $\frac{3}{100000}.$

$\frac{2}{100} = \frac{6}{1000000000}$

11. Aufg. Den Quotienten zwoer mit Ziffern von verſchiedenen Ordnungen ausgedrückter Zahlen zu finden.

Auflöſ. Es ſey a der Dividendus von der Ordnung m, und b der Diviſor von der Ordnung n;

oder

oder der Dividendus $= a.\ 10^m$, der Divisor $= b.\ 10^n$ (I. 51. III. 6.) also der Quotient $= \frac{a}{b}.\ 10^{m-n}$ (II. 10.) oder die niedrigste Zifer des Quotienten, ist von der Ordnung m-n. Dieses enthält verschiedene Fälle, nachdem m und n positiv oder negativ, und eines grösser als das andere ist.

Es sey $a = 12$, $b = 3$, und $m = +6$; $n = +4$ oder man soll 12000000 mit 30000 dividiren; der Quotient ist $4.\ 10^{6-4} = 400$.

Wenn $m = +6$, $n = +9$; so ist der Quotient $4.\ 10^{6-9} = 4.\ 10^{-3} = \frac{4}{10^3}$

Wenn $m = -3$, $n = +2$ so ist $0,012 : 300 = 4.\ 10^{-3-2} = 0,00004$.

Wenn $m = -3$, $n = -4$ so ist $0,012 : 0,0003 = 4.\ 10^{-3+4} = 40$.

Für $0,03 : 0,00007$ ist $a = 3$, $b = 7$, $m = -2$, $n = -5$; also der Quotient $= \frac{3}{7}.\ 10^{-2+5} = \frac{3}{7}.\ 10^{+3} = 0,428571.\ 1000 = 428,571$.

12. Aus diesen Sätzen fließt die Rechnung mit Decimalbrüchen, die durch Exempel deutlicher wird als durch viel Regeln.

I. Addition:

$\frac{3}{7} = 0,428571...$
$\frac{4}{7} = 0,571428...$
$0,999999...$

II. Subtraction

$\frac{5}{4} = 1,25$
$\frac{1}{2} = 0,5$
$0,75 = \frac{3}{4}$

III. Multiplication

$\frac{5}{8} = 0,625$
$\frac{8}{5} = 1,6$

0,625
3750
1,0000

IIII. Division

0,625 | 1,600 (2,56
1,250
3500
3125
3750
3750
0

13. Anm. Wenn einer von beyden Factoren oder alle beyde, Decimalbrüche enthalten, die ohne Ende fortgehen, so kann man das Product nicht völlig finden, und darf also nur die Zifern bis auf eine gewisse Decimalstelle für richtig annehmen. Es sey

$\frac{7}{3} = 2,33333$
$\frac{3}{7} = 0,42857$

0,933332
466666
1866664
1166665
1633331

0,999952381

Hier erhellet, daß die Ordnung -6 und die grössern Ordnungen verneinender Stellen im Producte nicht vollständig seyn können, weil in diese Stellen aus Zifern der Factoren, die hier weggelassen sind, Producte kämen. Z. E. die Zifer der Ordnung -6 die in $\frac{3}{7}$ vorkommen sollte, gäbe mit der 2 in $\frac{7}{3}$ multiplicirt, ein Product der Ordnung -6 das hier nicht vorhanden ist. Die Zifern des Products also, die in der Ordnung -6 und den grössern verneinenden Ordnungen stehen, haben nur in so weit einen Gebrauch, in so fern ihre Summen in die linker Hand stehenden Zifern einen

Ein-

Einfluß haben. Liesse man die Reihe der Zifern von der Ordnung -6 im Producte weg, so würde die Zifer der Ordnung -5 darinnen, nicht 9 sondern 7 werden. Nun läßt sich auf die gezeigte Art allemahl beurtheilen, in was für Stellen des Products die fehlende Zifern der Factoren einen Einfluß haben werden, und man würde sich also eine vergebliche Arbeit machen, wenn man das Product auf alle diese Stellen, so weit man dahin gehörige Zahlen aus den Factoren finden kann, berechnen wollte; Um aber doch des Vortheils, den die auch unrichtigen Zahlen diesen Stellen bringen können, nicht gänzlich zu enthehren, kann man etwa das Product bis auf die nächste von ihnen, z. E. hier bis auf die -6 berechnen. Das Exempel würde alsdenn so aussehen:

2,33333
0,42857

0,933332
46666
18666
1166
163

0,999993

Dieses Verfahren nennt man die abgekürzte Multiplication; (Multiplicatio contracta.)

14. Man hat eben so eine abgekürzte Division, wenn man bey jeder neuen Zifer des Quotienten den Divisor mit einer der letzten Zifern weniger braucht, wo freylich die letzten Zifern des Quotienten nicht vollkommen richtig herauskommen.

```
3,1415926 | 1,00000000 (0,31830992
            94247778
            ---------
             5752222
             3141592
             -------
             2610630
             2513272
             -------
              97358
              94245
              -----
               3113
               2826
               ----
                287
                279
                ---
                  8
```

Die beyden letzten Zifern des Quotienten würden, wenn man sich dieser Abkürzung nicht bedient hätte, seyn 88 gefunden worden; die ersten sechs aber kommen so heraus, wie man sie durch eine schärfere Rechnung findet.

Von den sechzigtheilichen Brüchen.

15. Erkl. Wenn ein Ganzes in 60 Theile, und jeder Theil wieder in 60 und so ohne Ende fortgetheilet werden, so nennt man diese Brüche sechzigtheilige (fractiones sexagesimales). Man kann auf eben die Art die ganzen in Schocke, (Sexagenas) und Schocke von Schocken u. s. w. sammlen.

So

So wird die Stunde, oder ein Grad, in Minuten (minuta prima) Secunden (minuta secunda,) Tertien u. s. w. eingetheilet.

16. Willk. S. Wenn keine Schocke vorkommen, pflegt man die Ordnungen der sechzigtheilichen Brüche mit römischen Zifern anzuzeigen: z. E. 3 St. 40′ 12″ 07‴ = 3 St. + $\frac{40}{60}$ + $\frac{12}{60.60}$ + $\frac{7}{60.60.60}$ wo die Stunde als die Einheit betrachtet wird. Diese römischen Zifern zeigen also die Exponenten der Potenz an, auf welche 60 im Nenner erhoben ist. Wir wollen statt ihrer die arabischen mit dem vorgesetzten Zeichen — brauchen; welches diese Rechnung der zehntheilichen (6) ähnlich machen wird, nur daß hier die Nenner Potenzen der 60 sind. Dieses hat auch den Vortheil, daß man die Schocke bequem andeuten kann. Wenn zu voriger Zahl noch 4 Schocke von Stunden, und 8 Schocke von Schocken kämen, so wäre

	+2	+1	0	-1	-2	-3
sie	08	04	03	40	12	07

17. Zus. Man kann also in dieser Rechnung jedes Paar Zifern ansehen, als wäre es in eine Potenz der 60 multipliciret, deren Exponent positiv oder negativ ist. Und daraus sind die Regeln leicht herzuleiten.

Exempel

	+1	0	-1	-2
	34	05	18	23
	18	12	54	14
Summe	52	18	12	37
Unterschied	5	52	24	9

+1 -3 -2 -1 -2

$17 \cdot 46 = 782 = 13\ 02$;

Nähmlich das Product $17.46 = 782$ bekömmt zur Einheit 60^{-2}, und enthält 13 mahl die Einheit 60^{1} wenn es mit 60 dividiret wird: Oder, in den gewöhnlichen Ausdrückungen: $17.60.\frac{46}{60^3} = \frac{17.46}{60^2}$ $= \frac{13}{60} + \frac{2}{60^2}$

Die Mühe der Division mit 60 zu ersparen, hat man eine Tafel gemacht, (canon hexacontadon; s. sexagenarum) in welcher man alle Producte jeder zwo Zahlen von 1 bis 60 in einander, so ausgedruckt findet, daß die grössern Einheiten von den geringern abgesondert sind. Z E. 17. 46 findet man so ausgedruckt 13 02. Der Werth der niedrigsten Einheit, und also auch der nächst höhern wird dabey insgemein durch eine besondere Tafel bestimmt, die man aber nicht nöthig hat, wenn man sich der verneinenden Exponenten auf die gezei-

zeigte Art bedienet. v. Hauſen Elem. Math. P. I. p. 77. Strauchii Tab. p. 257. Reiheri bacilli ſexagenales u. d. g.

Exempel der Diviſion.

-2	-1	+1 -0 -1
16	33	02 03 45
	32	
	-2	
	1 00	
	48	
	-3	
	12 00	
	12 00	
	0	

Nähmlich $\frac{3}{6}\frac{3}{0} : \frac{16}{60.60} = \frac{3}{1}\frac{3}{6}.60$ (I. 78.) $= 2.60 + \frac{1.60}{16}$; Ferner $\frac{1.60}{16} = 3 + \frac{1}{1}\frac{2}{6} = 3 + \frac{12.60}{16.60} = 3 = \frac{4}{6}\frac{5}{0}$.

18. Anm. Man könnte auf eben die Art eine Rechnung für die zwölftheilichen u. a. Brüche machen, wenn der Gebrauch ſolches erfoderte.

IIII. Capitel.

Die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.

1. Lehrs. Wenn eine Zahl aus zween Theilen bestehet, so enthält ihr Quadrat das Quadrat des ersten Theiles, ein doppeltes Product aus dem ersten Theile in den andern, und das Quadrat des andern Theiles.

Der Beweis ist das erste Exempel II. 5.

2. Zus. Wenn der erste Theil a ein Zehner, der zweyte b ein Einer ist, so fängt sich das Quadrat des ersten Theiles in der Stelle der Hunderter an, d. i. es hat da seine niedrigste Zifer, (I. 50.) und kann nur bis in die Stelle der Tausender gehen, weil es höchstens zwo Zifern haben kann; das doppelte Product fängt sich in den Zehnern an, (I. 37.) und geht höchstens bis in Tausender; das Quadrat des zweyten Theiles fängt sich in den Einern an, und geht höchstens bis in die Zehner.

57
57
---
49 = b^2
35 = ab
35 = ab
25 = a^2

$3^2$49

3. Zus. Die kleinste Zahl mit drey Zifern ist 100; und ihr Quadrat ist 10000 die kleinste Zahl mit fünf Zifern. Also hat von jeder Zahl die mit mehr als zwo Zifern geschrieben wird, das Quadrat mehr als vier Zifern.

4. Zus.

4. Zus. Von einer Zahl, die drey oder vier Zifern hat, muß die Quadratwurzel zwo Zifern (2) und nicht mehr haben.

5. Zus. Wenn eine Zahl von drey oder vier Zifern in Classen von der rechten gegen die linke getheilet wird, deren jede zwo Zifern, oder auch die linke nur eine enthält, so steckt in der linken Classe, das Quadrat des Zehners, und etwas von dem doppelten Producte, in der rechten Classe das übrige dieses Products und das Quadrat des Einers.

So bestünde im Exempel, die rechte Classe aus 49 und die linke aus 32. Von 24 ist das Quadrat 576, und die rechte Classe 76 die linke 5.

6. Zus. Es sey die Zifer des Zehners e, des Einers f, also die Zahl = e. 10 + f. 1 und ihr Quadrat e^2. 100 + 2. e f. 10 + f^2; dieses Quadrat ist kleiner als das Quadrat von (e + 1) 10 oder als das Quadrat des um eine Einheit seiner Ordnung vermehrten Zehners, weil eine solche Einheit mehr ist als die gröste Zifer, die in der Stelle der Einer stehen kann. Folglich kann die linke Classe, nicht das Quadrat eines grössern Zehners als a ist enthalten, weil ein solches Quadrat grösser als $(a + b)^2$ seyn würde. Dieses schien mir zu beweisen nöthig, weil die linke Classe wegen des Productes 2 a b, grösser seyn kann als a^2. Also ist das größte Quadrat, das in der linken Classe steckt, das Quadrat des Zehners, den die Wurzel enthält.

Diese Betrachtungen über die Zusammensetzung des Quadrats, (Synthesin) sind nöthig, um die Gründe der Ausziehung der Quadratwurzel (analysin quadrati) zu verstehen.

7. Aufg. Aus einer Zahl, die drey oder vier Zifern hat, die Quadratwurzel auszuziehen.

Aufl.

		a b	
32	49	57	
25			
R 7	$49 = 2ab + b^2$		
1	$0 = 2a$		
7	$0 = 2ab$		
	$49 = b^2$		
S 7	$49 = 2ab + b^2$		
0			

I) Man theile die Zahl in Classen wie (5).

II) Man suche, was für einer Zifer ihr Quadrat, so groß oder zunächst kleiner ist als die linke Classe (I. Cap. 49.) dieses Quadrats Wurzel ist der Zehner, den die gesuchte Quadratwurzel enthält (6. 5.) oder derselben erster Theil (2).

III) Man ziehe dieses Quadrat ab, so ist der Rest $R = 2ab + b^2$ (1).

IIII) In dem, was sich von diesem Reste noch in der linken Classe befindet, und in der höchsten Zifer der rechten Classe, steckt 2 ab und vielleicht noch etwas drüber (5).

V) Man verdoppele also den gefundenen ersten Theil der Wurzel, und dividire damit die im IIII. Abs. angezeigte Zahl, in welcher Absicht man

dieses

dieses doppelte so unterschreiben kann, daß seine niedrigste Zifer unter die niedrigste Zifer dieser Zahl, d. i. unter die höchste der rechten Classe kömmt.

VI. Der Quotient, den man bekömmt, ist nicht kleiner als b, aber er kann grösser seyn, weil diese Zahl grösser als 2 ab seyn kann (5).

VII. Man multiplicire ihn also mit dem doppelten des V. Abs. und schreibe dieses Product als 2 ab unter das doppelte, weil es von eben der Ordnung ist. (I. Cap. 37.)

VIII. Man mache ferner das Quadrat des Quotienten, und schreibe desselben niedrigste Zifer in die Stelle der Einer, die höhere in die Stelle der Zehner wie bey a.

VIIII. Man addire die VII. und VIII. gefundenen Zahlen; wie bey S.

X. Wenn S = R ist, so ist a + b die völlige Wurzel. (1)

XI. Wenn S ⩽ R so ist a + b kleiner als die eigentliche Wurzel; aber diese ist um keine schlechte Einheit grösser, sonst hätte man nach dem VI. Absatze, b um 1 grösser gefunden. Also weiß man in diesem Falle zwo Zahlen, die nur um 1 unterschieden sind, zwischen welche die Wurzel fallen muß.

XII. Wenn S ⩾ R so ist b zu groß angenommen, (VI. Abs.) man vermindere es also um eine oder mehr Einheiten, bis man ein b bekömmt das S = R oder S ⩽ R gibt, wovon alsdenn der X. oder XI. Abs. gilt.

XIII. Die gegebene Zahl des I. Abs. muß wieder herauskommen, wenn man a + b mit sich selbst multipliciret, und in dem Falle des XI. Absatzes, dazu R – S addiret.

XIIII. Die VII, VIII, und VIIII. Regel lassen sich in eine zusammenziehen. Man schreibe neben das doppelte des ersten Theiles (V) den gefundnen Quotienten rechter Hand, und multiplicire diese Zahl, die aus 2 a + dem gefundenen Quotienten, der b seyn soll besteht, mit dem gefundenen Quotienten; so erhält man $(2a+b).\ b = 2ab + b^2$ auf einmahl, und hat die folgenden X. . XIII. Regeln noch zu beobachten.

Die Rechnung sieht so aus:

$R = 749$

$107 = 2a + b$

$S = 749 = (2a + b).\ b.$

o

8. Aufg. Die Theile eines Quadrates zu finden, wenn die Wurzel aus mehr als zween Theilen bestehet.

Aufl. Für eine dreytheilichte Wurzel p + q + r, setze man $p + q = a$, $r = b$; so ist aus (I)

$a^2 = p^2 + 2pq + q^2 = A$

$2ab = 2.\ (p+q).\ r$

$b^2 = r^2$

Also das Quadrat der dreytheilichten Wurzel

$p^2 + 2pq + q^2 + 2.\ (p+q).\ r + r^2 =$

$A + 2.\ (p+q).\ r + r^2 = B$

Hat

Hat die Wurzel vier Theile $p+q+r+f$ so setze man $p+q+r=a$; $f=b$; und ihr Quadrat ist

$$B+2.(p+q+r).f+f^2=C$$

Hat sie fünf Theile, daß nähmlich zu den vorigen vieren noch t kömmt, so setze man die ersten viere $=a$; und $t=b$; ihr Quadrat ist also

$$C+2.(p+q+r+f).t+t^2=D \text{ oder}$$

$$p^2+2pq+q^2$$
$$+2.(p+q).r+r^2$$
$$+2.(p+q+r).f+f^2$$
$$+2.(p+q+r+f).t+t^2$$

In der ersten Zeile steht das Quadrat der zweytheilichten Wurzel $=A$; in den ersten beyden zusammen, der dreytheilichten $=B$; in den ersten drey zusammen, der viertheilichten $=C$; in den ersten vier zusammen, der fünftheilichten $=D$; käme zu der Wurzel noch ein Theil $=u$; so käme für ihr Quadrat, zu diesen vier Zeilen, noch eine

$$2.(p+q+r+f+t).u+u^2$$

Man sieht leicht daß dieses ohne Ende nach folgenden Gesetze fortgeht: Wenn zu der Wurzel ein neuer Theil kömmt, so kommt zu dem Quadrate, ein doppeltes Product, aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen, und das Quadrat des neuen Theils. Wenn also eine vieltheilichte Wurzel um einen Theil wächst, so kömmt zu ihrem Quadrate so was dazu, wie zu dem Quadrate einer eintheilichten Wurzel kömmt, wenn sie um einen Theil wächst, das ist eine zweytheilichte aus ihr wird.

Was

Was hier der zweyte Theil ist, ist dorten der neue; statt des dortigen ersten ist hier die Summe aller vorhergehenden. Man kann also dieses Gesetz so ausdrücken: man sehe die Wurzel als eine zweytheilichte an, da die Summe aller Theile, den letztern ausgenommen, der erste Theil, und der letzte Theil, der zweytheilichten zweyter Theil wäre.

9. Zus. Jedes Quadrat bestehet aus den Quadraten aller Theile der Wurzel, und aus den doppelten Producten der Summen aller ersten Theile in jeden nächstfolgenden; z. E. der beyden ersten in den dritten; der drey ersten in den vierten, u. s. f.

10. Zus. Es sey e eine Zifer von der Ordnung n, und f eine von der Ordnung n - 1, daß also e und f zweene nächst auf einander folgende Theile der Wurzel bedeuten, die sich durch e. 10^n + f. 10^{n-1} ausdrücken lassen (I. 51.). So ist des Theiles, den e vorstellt, sein Quadrat = e^2. 10^{2n} also von der Ordnung 2n; sein doppeltes Product in den nächstfolgenden = 2 e f. 10^{2n-1} (II. 7.) von der Ordnung 2n - 1, und das doppelte Product aus der Summe aller Theile der Wurzel von höhern Ordnungen, bis mit auf den von der Ordnung n, in den Theil von der Ordnung n - 1 ist ebenfalls von der Ordnung 2n - 1, weil man alle Theile der höhern Ordnungen als Mengen der Einheiten von der Ordnung 2n ansehen kann; (I. 27); also fangen sich die Quadrate der Theile in den geraden Ordnungen und die doppelten Producte in den ungeraden an.

11. Zus.

11. Zus. Das Quadrat und das doppelte Product des 10 S. können zusammen keine Zifer enthalten, welche die Ordnung $2n+2$ erreichte. Vom Quadrate ist es daher klar, weil es nicht über zwo Zifern hat, davon die niedrigste von der Ordnung $2n$ ist. In dem doppelten Producte kann $2ef$ drey Zifern haben, deren höchste also von der Ordnung 2 oder in 10^2 multiplicirt ist. Solchergestalt kann die höchste Zifer von $2ef$. 10^{2n-1} in 10^{2n+1} multiplicirt, oder von der Ordnung $2n+1$ seyn. Der Satz ist also von jedem dieser beyden Dinge für sich betrachtet klar. Daß aber auch ihre Summe die Ordnung $2n+1$ nicht übersteige, erhellet daraus, weil solches nicht geschicht, wenn e und f die größten Wehrte haben, die sie haben können, jedes nähmlich eine Neune ist, und also die beyden nach einander folgenden Theile der Wurzel $9.10^n + 9.10^{n-1}$ sind. Alsdenn ist des höchsten Theiles Quadrat $= 81\ 10^{2n}$ und das doppelte Product $= 2.81.10^{2n-1} = 161.10^{2n-1}$ also stehen diese beyde Theile so unter einander.

81 von der Ordnung $2n$
161 von der Ordnung $2n-1$

Summe 971 von der Ordnung $2n-1$

Hier ist also die höchste Zifer 9 von der Ordnung $2n+1$; Und wenn e und f kleinere Zifern sind, sind diese beyde Dinge zusammen noch weniger

als

als hier für den grösten Werth von e und f gefunden worden.

12. Zus. Wenn g der nächst folgende Theil der Wurzel, also von der Ordnung n-2 ist, so erhellet wie in 10. 11. daß das Quadrat von der Ordnung 2n-2, und das doppelte Product aus f in g von der Ordnung 2n-3 ist, auch beyde zusammen die Ordnung 2n-1 nicht erreichen. Wie auch daß das Quadrat von f niedriger ist als alle vorhergehende Theile des Quadrats der Wurzel und das Quadrat von g niedriger als alle vor ihm vorhergehende Theile, oder: daß in dem Quadrate einer Zahl, das Quadrat der niedrigsten Zifer der niedrigste Theil ist.

13. Zus. Wenn eine Zahl M aus n + 1 Zifern bestehet, daß ihre höchste Zifer von der Ordnung n ist, (I. 38.) so nenne man die Zahl, welche diese höchste Zifer ausdrückt = a, und die Zahl, welche alle die folgenden Zifern zusammen ausdrücken = b, daß $M = a + b = e.\ 10^n + b$ wenn die höchste Zifer ohne Absicht auf den Wehrt ihrer Stelle betrachtet e heißt. Weil nun eine einzige Einheit einer höhern Ordnung mehr ist als eine Zahl, die mit lautern Zifern niedrigerer Ordnungen geschrieben wird, so ist $1.\ 10^n > b$ also $(e+1).\ 10^n > M$ als ist das Quadrat von $(e+1).\ 10^n$ grösser als das von M; In dem Quadrate von M steckt also kein grösser Quadrat als das Quadrat von a; Und da

a^2 in den Zifern der Ordnung 2n im Quadrate von M enthalten ist, (10) so ist das größte Quadrat, das in diesen Zifern steckt $= a^2$. Ferner ist eine einzige Einheit von der Ordnung $n+1$ oder $10^{n+1} < M$ und also das Quadrat jener Einheit, d. i. eine Eins von der Ordnung $2n+2$ (II. 7.) grösser als das Quadrat von M; Folglich kann das Quadrat von M keine Zifer von der Ordnung $2n+2$ haben. Hätte es nur eine 1 von dieser Ordnung, so folgten dieser 1 wegen der Theile des Quadrats, die von den verschiedenen Zifern der Zahl M entstehen, noch Zifern und nicht lauter Nullen. Eine 1 aber von der Ordnung $2n+2$ nach der nicht lauter Nullen folgen, ist mehr als eine Eins von dieser Ordnung, nach der lauter Nullen folgen; also wäre das Quadrat von M mehr als das von 10^{n+1} welches doch nicht seyn kann.

14. Zus. Das Quadrat von M, hat Zifern wenigstens von der Ordnung $2n$ (10) höchstens von der $2n+1$ (13) das ist, es hat wenigstens $2n+1$ höchstens $2n+2$ Zifern (I. 28.).

15. Zus. Eine Zahl, die $2n+1$ oder $2n+2$ Zifern hat, hat eine Quadratwurzel von n Zifern. Denn das Quadrat einer Wurzel von weniger Zifern, kann nicht $2n+1$, und das Quadrat einer Wurzel von mehr Zifern, muß mehr als $2n+2$ Zifern haben (14).

16. Zus. Wenn man eine Zahl, die $2n+1$ oder $2n+2$ Zifern hat, in Classen von der Rechten ge-

gen die Linke abtheilet, daß jede Classe zwo Zifern bekömmt, so erhält man im letzten Falle $n+1$ Classen jede von einem Paare Zifern; im ersten n Classen jede von einem Paare Zifern, und die höchste Zifer bleibt einzeln. Wird also diese einzelne höchste Zifer auch für eine Classe gerechnet, so hat die Zahl in beyden Fällen so viel Classen, so viel Zifern ihre Wurzel hat (15).

17. Zus. Die höchste Classe enthält die Zifern von der Ordnung $2n$ und $2n+1$, und also ist das größte Quadrat, das in ihr steckt, das Quadrat der höchsten Zifer (13).

18. Zus. Was noch über dieses in dieser Classe steckt, zu der Zifer von der Ordnung $2n-1$, d. i. zu der höchsten Zifer der nächstfolgenden Classe gerechnet, enthält das doppelte Product aus dem höchsten Theile der Wurzel in den nächstfolgenden (11). Und der Ueberschuß der Zifern von der Ordnung $2n-1$ nebst der Zifer von der Ordnung $2n-2$ d. i. nebst der niedrigsten Zifer der zweyten Classe, enthält das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel (11).

19. Zus. Also kann man aus den beyden höchsten Classen, die beyden höchsten Theile der Wurzel nach (7) finden.

20. Zus. Was nach diesem Verfahren übrig bleibt, zu der Zifer von der Ordnung $2n-3$, d. i. zu der höchsten Zifer der dritten Classe genommen, enthält das doppelte Product aus den beyden ersten

Theilen

Theilen zusammen, in den dritten (10) und was nach Abzuge dieses doppelten Products übrig bleibt, nebst der Zifer von der Ordnung 2n–4 d. i. nebst der niedrigsten Zifer der dritten Classe enthält das Quadrat des dritten Theiles der Wurzel (12) den man also finden kann, wenn man die beyden ersten zusammen als einen ansiehet, und damit und mit der höchsten Zifer der dritten Classe, nebst den höhern so verfährt, wie man mit dem ersten Theile und der höchsten Zifer der zweyten Classe nebst den höhern, verfuhr, den zweyten Theil zu finden (19).

21. Zus. So viel Zifern, als man von der Wurzel schon gefunden hat, kann man zusammen als einen einzigen Theil, von der Ordnung der niedrigsten Zifer unter den gefundenen ansehen, (I. 27.) daß also die nächste Zifer, die man sucht, den nächst niedrigern Theil bedeutet. Ferner ist das Quadrat des schon gefundenen Theiles der Wurzel, allezeit schon abgezogen worden, ehe man daran denket den nächstfolgenden zu finden (19. 20.). Es bedeute nun n nicht mehr die Ordnung der höchsten Zifer der Wurzel, sondern der niedrigsten in dem schon gefundenen Theile, so hat man das Quadrat dieser niedrigsten Zifer von derjenigen Zahl, aus welcher man die Wurzel ziehen will, ihrer Zifer von der Ordnung 2n abgezogen. Diese Zifer ist die niedrigste in ihrer Classe (16), denn es stehen ihr 2n Zifern, und also n Paare von Zifern zur rechten Hand (I. 28.). Nachdem man also das Quadrat des gefundenen Theiles der Wurzel abgezogen

hat, so nimmt man die übrig gebliebenen Ziffern von der Ordnung 2n, nebst den höhern, zu der Zifer von der Ordnung 2n−1; d. i. zu der höchsten der folgenden Classe, und weiß, daß man in diesen Ziffern zusammen das doppelte Product aus dem gefundenen Theile der Wurzel von der höchsten Ordnung bis an die Ordnung n, in den nächsten, den man sucht, von der Ordnung n−1 antrifft (10). Man findet also den nächst folgenden Theil der Wurzel überhaupt, wie man aus dem ersten Theile den zweyten findet (19), und prüfet eben so, ob man ihn richtig gefunden hat, indem man sein Quadrat und sein doppeltes Product zusammen addirt von der niedrigsten Zifer der Classe, aus der man ihn gefunden hat, und den nächst höhern noch übrigen abzieht. Und so gibt jede Classe eine neue Zifer der Wurzel.

23. Aufg. **Aus einer Zahl, die so viel Ziffern hat als man will, die Quadratwurzel zu finden.**

Aufl. I. Man theile sie in Classen, jede zu zwo Ziffern, von der Rechten gegen die Linke, die Wurzel wird so viel Ziffern haben, als Classen herauskommen; die höchste Classe kann auch nur eine Zifer enthalten (15).

II. Man suche, welcher Zifer Quadrat der höchsten Classe gleich, oder nächst kleiner ist. Diese Zifer ist die höchste der Wurzel (17), deren Quadrat man abziehen muß.

III. Zu dem, was in dieser Classe übrig bleibt, nehme man die folgende Classe; Unter die höchste

Zifer

Zifer dieser folgenden Classe, schreibe man die niedrigste Zifer des verdoppelten gefundenen Theiles der Wurzel, und die höhern Zifern dieses Doppelten nach der Ordnung weiter linker Hand. Man dividire mit diesem Doppelten in die Zifern, die darüber stehen, und nehme den Quotienten für den nächstfolgenden Theil der Wurzel an.

IIII. Man multiplicire diesen Quotienten mit dem Doppelten des ersten Theiles, (III) und schreibe das Product auch so, daß es sich unter dem Anfange dieses Doppelten anfängt.

V. Man mache das Quadrat des Quotienten, und fange es unter der niedrigsten Zifer der Classe, aus deren höchsten Zifer man den Quoticnten gefunden hat, zu schreiben an, so, daß die höhere Zifer dieses Quadrates unter die höchste Zifer der erwähnten Classe zu stehen kömmt.

VI. Man addire das doppelte Product (IIII) und das Quadrat (V), wenn sich die Summe von den darüberstehenden Zahlen abziehen läßt, so ist der Quotient richtig der gesuchte Theil der Wurzel. Ist aber die Summe grösser, als was über ihr steht, so muß man den Quotienten so lange vermindern, bis der Abzug angehet.

VII. Was übrig bleibet, nehme man zu der folgenden Classe, sehe soviel von der Wurzel, als man gefunden hat, als den ersten Theil an, und verfahre, daraus den nächstfolgenden zu finden, nach dem III. IV. V. VI. Absatze.

VIII. Wenn nach Vollendung dieser Arbeit von der niedrigsten Classe, und nachdem man alle Zifern der Wurzel, bis mit auf den Einer gefunden hat, in der Einer und Zehner Stellen, noch etwas übrig bleibet, so ist die gefundene Zahl zunächst kleiner als die Wurzel, so daß, wenn man diese Zahl um 1 vermehrte, sie grösser als die Wurzel würde.

VIIII. Die gefundene Zahl mit sich selbst multipliciret, und in dem Falle des VIII Absatzes das übriggebliebene dazu addirt, muß die Zahl, aus welcher man die Wurzel gezogen hat, wieder herstellen.

N Exempel

1	70	30	25	(p q r s
1	= pp			1 3 0 5

A | 70 |
(2) = 2p
6 = 2pq
9 = qq

P = 69 = 2pq+qq

B = 1|30|
2 6 = 2.(p+q)

Q = 0 00 = 2(p+q). r+rr

C | 1 | 30 | 25 |
|(26|0)| = 2.(p+q+r)
1 30 0 = 2.(p+q+r). s
25 = ss

R 1 30 25 = 2.(p+q+r). s+ss

0

Bey

Bey A, B, C, ist jedesmahl die folgende Classe zu dem Reste von der vorhergehenden genommen, und eine neue Zifer der Wurzel daraus gefunden worden. Ferner erhellet, daß nichts übrig geblieben ist, nachdem man von N, zusammen $pp+P+Q+R$ abgezogen hat: Aber dieses ist zusammen das Quadrat von $p+q+r+f(8)$ also ist dieses Quadrat $=N$ und folglich $\sqrt{N}=p+q+r+f$. Daß die Theile des Quadrates zum Abziehen an den gehörigen Orten unterschrieben sind, erhellet aus (10).

24. Lehrs. Es sey u eine ganze Zahl, die sich nicht durch die kleinere ganze Zahl x dividiren läßt, also $\frac{u}{x}$ ein uneigentlicher Bruch, der sich nicht auf eine ganze Zahl bringen läßt (l. 57.) das Quadrat eines solchen Bruches wird keine ganze Zahl seyn.

Bew. Es sey dieses Quadrat $\frac{uu}{xx}=p$ einer ganzen Zahl, so ist $\frac{uu}{x}=px$ einer ganzen Zahl. Also muß uu sich durch x dividiren lassen; d. i. x muß ein Factor des Products uu seyn. Es ist aber, wie angenommen wird, kein Factor von u; Also ist nur folgende Art möglich, wie x ein Factor von uu seyn kann: Es muß selbst ein Product von zween Factoren seyn, deren einer ein Factor von dem einen u, der andere von dem andern u ist, so wird das Product beyder u, das Product x enthalten. Weil aber ein u mit dem andern einerley ist, so

kann das eine keinen Factor von x enthalten, den das andere nicht auch enthielte, und also ist entweder in keinem u ein Factor von x enthalten, oder das ganze x ist als ein Factor in jedem u enthalten. Das letzte soll nicht seyn, also findet das erste statt, und folglich ist x kein Factor von uu, also auch $\frac{uu}{xx}$ keine ganze Zahl.

25. Zus. Eine Zahl, die aus einer ganzen und einem eigentlichen Bruche bestehet, läßt sich auf einen uneigentlichen von der Beschaffenheit (24) bringen (l. 79.) und hat also zu ihrem Quadrate keine ganze Zahl. Von einem eigentlichen Bruche ist dieses schon aus (l. 76.) klar.

26. Zus. Wenn die Quadratwurzel einer ganzen Zahl, grösser als eine gewisse ganze Zahl M und kleiner als M + 1 ist, so gibt es keinen eigentlichen Bruch, der an M gehenkt diese Wurzel völlig genau darstellte. Solche Wurzeln lassen sich also weder durch ganze Einheiten noch durch Theile der Einheit vollkommen richtig ausdrücken. Man heißt sie Irrationalzahlen oder surdische Zahlen, (numeri irrationales, surdi, incommensurabiles). Und Zahlen, die sich durch ganze Einheiten, oder Theile derselben ausdrücken lassen, heissen Rationalzahlen: dahin gehören also die ganzen Zahlen und beyderley Brüche, (l. 57.) wenn sich Zähler und Nenner von ihnen völlig angeben lassen. Zu Irrationalzahlen wird erfodert, daß kein Theil der Einheit sie mißt,

oder in ihnen einigemahl genau nach einer ganzen Zahl enthalten ist. Denn sonst gibt es Rationalzahlen, die von gewissen Theilen der Einheit nicht gemessen werden, ob es gleich andere thun (III. 5.).

27. Aufg. Aus einer ganzen Zahl, deren Quadratwurzel keine ganze Zahl ist, diese Wurzel durch Näherung auszuziehen.

Aufl. Wenn man annimmt, die Wurzel enthalte ganze und Zehntheilchen, so enthält das Quadrat Hunderttheilchen (III. 9.). Man kann aber die gegebene ganze Zahl so ausdrücken, daß sie Hunderttheilchen enthält, wenn man ein Paar Nullen an sie henket, den Ort der Einer aber nach III. 2. bezeichnet. Z. E. $15 = 15,00 = \frac{1500}{100}$. So kann man also die Wurzel erstlich in ganzen Zahlen, und denn die dazu gehörigen Zehntheilchen suchen. Ein Quadrat von Hunderttheilchen, enthält Zehntausendtheilchen, und also müssen an die gegebene Zahl zwey Paar Nullen gehenkt werden, um die Wurzel in Hunderttheilchen zu finden. Ueberhaupt hat eine Wurzel, die Decimalbrüche von der Ordnung $-n$ enthält, ein Quadrat, dessen niedrigste Zifer von der Ordnung $= 2n$ ist (II. g.). Die ganze Zahl aber, aus welcher man die Wurzel bis auf die Ordnung $-n$ ziehen will, wird als eine Menge Decimalbrüche von der Ordnung $-2n$ ausgedruckt, wenn man an sie n Paare Nullen henket. Man henke also an die ganze Zahl, soviel Paare Nullen, soviel Decimalzifern der Wurzel man finden will, und verfahre übrigens nach (23.), denn es ist soviel,

als wäre die Wurzel, die man sucht, eine ganze Zahl, deren Einheit eine Eins von der Ordnung $-n$ ist. (l. 53.).

Exempel.

$\sqrt[3]{00} = 1{,}7320508\ldots = r_3$

1
2 | 00
00
(27)
189
1100
(343)
1029
7100
(3462)
6924
17600
(34640)
1760000
(346405)
1732025
2797500
(3464100)
27975000
(34641008)
277128064
2621936

Probe.

Probe.

$(1,7320)^2 = 2,99982400$

	-7	
2. 1,732. 508	=	1759712
	-7	
	$(508)^2 =$	258064
Quadrat des gefundenen Theiles der Wurzel		2,99999997378064
Rest		2621936
Summe		3,

Von der Cubikwurzel.

28. Aufg. Den Würfel einer zweytheilichten Wurzel $a+b$ zu finden.

Aufl. Das Quadrat

$$a^2 + 2ab + b^2$$

multiplic mit $a + b$

gibt

$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$
$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

29. Zus. Wenn a ein Zehner, und b ein Einer wie (2. 6.) ist, so ist $a^3 = e^3$. 1000

$3a^2b = 3e^2f$. 100

$3ab^2 = 3ef^2$. 10

$b^3 = f^3$. 1.

woraus man siehet, in was für Stellen des Würfels sich diese Theile anfangen.

30. Zus.

30. Zus. Der Würfel einer einzigen Zifer kann nicht über drey Zifern haben, (l. 49.) das Quadrat der grösten Zifer dreymahl genommen, und in die grösste Zifer multipliciret, kann nicht über 3. 9. 9. 9 = 3. 729 = 2187 seyn, und also kann, wenn e = 9, f = 9, ist, $3a^2b$ sich bis in die Stelle der Hunderttausender erstrecken. Eben so kann $3ab^2$ wenn es am grösten ist nur 3. 9. 9². 10 = 21870 seyn, und sich also bis in die Stelle der Zehntausender erstrecken, und endlich b^3 kann bis in die Hunderter gehen.

Exempel; Wenn e = 5, f = 7 so ist

a^3 = 125000
$3a^2b$ = 525
$3ab^2$ = 735
b^3 = 343

185193 = (57)³

Von einer Zahl mit zwo Zifern, hat der Würfel zum wenigsten vier Zifern, weil der Würfel von 10; soviel hat. Mehr als sechs Zifern kann der Würfel einer Zahl von zwo Zifern nicht haben. Denn die kleinste Zahl mit drey Zifern, 100; hat zum Würfel, die kleinste Zahl mit sieben Zifern 1000000.

31. Zus. Von einer Zahl, die mit vier, fünf oder sechs Zifern geschrieben wird, hat die Cubikwurzel nicht weniger (l. 49.) noch mehr (30) als zwo Zifern. Wenn man sie also von der rechten gegen die linke in Classen theilet, daß die rechte oder niedrigste Classe drey Zifern, die linke oder höchste, eine,

ne, zwo oder drey bekömmt, so sind so viel Classen als Theile der Wurzel.

32. Zus. Der Würfel von (e + 1). 10. ist grösser als der Würfel von e. 10 + f. 1 (wie 6). Was also von den Producten $3a^2b$, $3ab^2$, in die linke Classe kömmt, kann den daselbst befindlichen Würfel von a oder von e. 10 nie so stark vermehren, daß dieser Vermehrung wegen in dieser Classe der Würfel von (e + 1). 10 zu stehen käme. Folglich ist der größte Würfel, den die linke Classe enthält, a^3.

33. Zus. In der höchsten Zifer der rechten Classe, fängt sich $3a^2b$ an, in der mittlern $3ab^2$, in der niedrigsten, b^3.

34. Aufg. Aus einer Zahl N; die vier bis sechs Zifern hat, die Cubikwurzel zu ziehen.

Aufl. I. Man theile sie nach (31) in Classen, und ziehe von der linken Classe den größten Würfel, der darinnen steckt, ab, seine Wurzel ist der Zehner, den die Wurzel enthält (32).

II. Den Rest nehme man zu der folgenden Classe, quadrire den gefundenen Theil der Wurzel, nehme dieses Quadrat dreymahl, und fange solches dreyfache Quadrat unter der höchsten Zahl der rechten Classe zu schreiben an, von da man es weiter gegen die linke schreibe.

III. Man dividire damit die darüber stehenden Zahlen. Der Quotient ist nicht kleiner als b kann aber grösser seyn (33).

IIII. Ihn zu prüfen; multiplicire man ihn mit dem dreyfachen Quadrate (11) und das Product fange man unter der höchsten Zahl der rechten Classe zu schreiben an, weil es $3a^2b$ seyn soll (33).

V. Des Quotienten Quadrat multiplicire man mit dem ersten Theile, nehme das Product dreymahl und fange es unter der mittlern Zahl der rechten Classe zu schreiben an, weil es $3ab^2$ seyn soll (33).

VI. Des Quotienten Würfel, als b^3 fange man unter der niedrigsten Zahl der rechten Classe zu schreiben an (33).

VII. Man addire die IIII. V. VI. gefundenen Grössen; Wenn ihre Summe S; so groß ist, als der Rest der ersten Classe, und die zweyte zusammengenommen oder R so ist der Quotient b, und $a+b$ die gesuchte Cubikwurzel, als eine Zahl, deren Cubus (I. VII.) der gegebenen Zahl gleich ist.

VIII. Wenn $S \leqslant R$ so muß man den Quotienten immer um 1 vermindern, und mit der verminderten Zahl, die als Quotient betrachtet zu klein wäre, wieder nach IIII. V. VI. VII. verfahren, bis man ein S bekömmt, das nicht grösser ist als R. Sind diese Dinge gleich wie in VII. so hat man solchergestalt den zweyten Theil der Wurzel richtig gefunden.

VIIII. Ist $S \lesssim R$, so ist die gesuchte Wurzel grösser als die gefundene Zahl, aber nicht um eine Einheit, und fällt also zwischen zwo ganze nur um

1 unterschiedene Zahlen, die sich solchergestalt angeben lassen. Denn alsdenn ist der Würfel der gefundenen Zahl kleiner als N und der Würfel einer Zahl, die um 1 mehr ist als die gefundene, grösser.

Exempel N

ab

185 | 193 (57
$a^3 = 125$ |
R = 60 | 193
$3a^2 = (75)$
$3a^2b = 525$
$3ab^2 = 735$
$b^3 = 343$

S = 60193

35. Auf. Den Würfel einer Wurzel, die mehr als drey Theile hat, zu finden.

Aufl. Für eine dreytheilichte Wurzel $p+q+r$ setze man $p+q = a$; $r =$ so ist (28).

$a^3 = (p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + p^3$
$3a^2b = 3.(p+q)^2.r$
$3ab^2 + b^3 = 3.(p+q)r^2 + r^3$

Und so erhellet, daß der Würfel einer vieltheilichten Wurzel, die Würfel aller Theile, die dreyfachen Producte aus dem Quadrate jeder Summe aller vorhergehenden Theile in den nächstfolgenden und die dreyfachen Producte aus jeder Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächstfolgenden

den enthalte. Es sey nähmlich $M = p + q + r + s + t \ldots$ wo so viel Theile als man will folgen mögen. Ferner sey $A = (p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$; $B = (p+q+r)^3$; $C = (p+q+r+s)^3$, $D = (p+q+r+s+t)^3$ u. s. f.

So kann man, wenn man B finden will; $p+q$ als den ersten Theil der Wurzel und r als den andern ansehen; also ist $B = A + 3.(p+q)^2.r + 3.(p+q)r^2 + r^3$ So kann man für C; $p+q+r$ als der Wurzel ersten Theil und s für den zweyten ansehen, und bekömmt $C = B + 3.(p+q+r)^2. + 3.(p+q+r).s^2 + s^3$ Für D sind $p+q+r+s$ zusammen der erste Theil und t der andere; also

$D = C + 3(p+q+r+s)^2.t + 3.(p+q+r+s).t^2 + t^3$ u. s. w. Der Würfel von M ist A, B, C, D, u. s. f. nachdem die Wurzel 2, 3, 4, 5 u. s. f. Theile hat; Man kann nähmlich allezeit alle Theile der Wurzel weniger dem letzten $= a$ und den letzten $= b$ setzen, und so nach (28) verfahren.

36. Zus. Es sey $p = e.10^n$, $q = f.10^{n-1}$; $r = g.10^{n-2}$ wo also e, f, g, Zifern von nach einander folgenden Ordnungen sind; so ist $A = e^3.10^{3n} + 3e^2f.10^{3n-1} + 3ef^2.10^{3n-2} + f^3 10^{3n}$ Hier ist der letzte Theil oder der Würfel von q, von der niedrigsten Ordnung unter allen. Und wie dieses daraus fließt, daß p um eine Ordnung höher als q ist, so kann man $p+q$ zusammen als von der Ord-

Ordnung n - 1 ansehen, (I. 27.) da denn eben so erhellet, daß r^3 in B von der niedrigsten Ordnung ist; Und so p + q + r als zusammen von der Ordnung n - 2 angesehen, daß f^3 von der niedrigsten Ordnung ist, wenn n - 3 die Ordnung von f ist. In einer Zahl also, die mit Zifern nach einander folgenden Ordnungen geschrieben ist, ist der Würfel der niedrigsten Zifer, der niedrigste Theil in dem Würfel der Zahl.

37. Zus. M sey eine mit Zifern von nach einander folgenden Ordnungen geschriebene Zahl; ein Theil dieser Zahl, welcher die höhern Zifern bis mit auf die Ordnung n in sich begreift, heisse N und dieses Theiles niedrigste Zifer ohne ihren Wehrt wegen der Stelle betrachtet sey e, oder der niedrigste Theil von N sey e. 10^n; Nach N folge f. $10^n = q$ so daß $M = N + f. 10^{n-1} + O = N + q + O$ wo O alle folgende Theile von M bedeutet, um die ich mich jetzo nicht bekümmere. Der Würfel von M wird also das Stück $N^3 + 3 N^2 . f. 10^{n-1} + 3 N. f^2. 10^{2n-2} + f^3 . 10^{3n-3} = N^3 + 3 N^2 q + 3 N q^2 + q^3$ enthalten worinnen O noch nicht vorkömmt. In diesem Stücke wird von N^3 der niedrigste Theil $e^3 . 10^{3n}$ seyn, (36) von N^2 ist der niedrigste Theil $e^2 . 10^{2n}$ (12) also von $3 N^2 q$ der niedrigste Theil $3 e^2 f. 10^{3n-1}$; imgleichen ist von $3 N q^2$, der niedrigste Theil $3 e f^2 . 10^{3n-2}$, und $q^3 = f^3$.

10^{3n-3}; Also sind die Theile, aus denen der Würfel von N+q, ein Stück des Würfels von M bestehet, von den Ordnungen 3n; 3n-1; 3n-2; 3n-3; Jeder dieser Theile nähmlich kann auch Zifern höherer Ordnungen enthalten, aber man bringt sie wie in I. 27. alle auf die niedrigste Ordnung dieses Theiles.

38. Zus. Wenn man die Zifern, mit denen M^3 geschrieben ist, in Classen, von der rechten gegen die linke abtheilet, daß in jede Classe drey Zifern kommen, so stehen nach der niedrigsten Zifer von N^3, n Classen, nähmlich 3n Zifern zur rechten. Die höchste Zifer in der Classe, die nach N^3 zur rechten folgt, ist von der Ordnung 3n-1, und in ihr fängt sich also $3N^2.q$ an; und erstreckt sich weiter zur linken in höhere Zifern. In der mittlern Zifer erwähnter Classe, als in der Ordnung 3n-2 fängt sich $3N.q^2$, und in der letzten q^3 an (37).

39. Zus. M bedeute eine Zahl, deren höchste Zifer von der Ordnung n ist; Dieser höchsten Zifer Würfel kann drey Zifern haben, (I. 49.) seine niedrigste Zifer ist von der Ordnung 3n (37) d. i. es folgen 3n Zifern rechter Hand nach ihr, (I. 28.) also können nach seiner höchsten Zifer 3n+2 Zifern folgen, oder sie kann von dieser Ordnung seyn. Und also kann die Zahl aller Zifern, die in M^3 enthalten sind, nicht weniger als 3n+1 seyn, aber bis auf 3n+3 steigen. Höher aber nicht. Denn M ist kleiner als eine einzige Einheit von der Ordnung

n+1;

$n+1$; Aber der Würfel einer Einheit von der Ordnung $n+1$ ist eine Einheit von der Ordnung $3n+3$ (1;50.) d. i. eine 1 nach der $3n+3$ Nullen folgen. Hätte nun M^3 mehr als $3n+3$ Zifern, so enthielte sie eine Zifer wenigstens von der Ordnung $3n+3$, diese Zifer könnte nicht geringer als 1 seyn, und nach ihr folgten $3n+3$ Zifern, die nicht lauter Nullen seyn könnten, da M verschiedene Zifern enthalten und nicht selbst eine Eins mit Nullen seyn soll. Aber eine 1 nach der $3n+3$ Zifern, die nicht lauter Nullen sind, folgen; ist mehr als eine 1 nach der nur so viel Nullen folgen. Also wäre M^3 mehr als der Würfel einer Einheit von der Ordnung $n+1$; und soll doch weniger seyn. Also hat M^3 nicht mehr als höchstens $3n+3$, und wenigstens $3n+1$ Zifern.

40. Aufg. **Aus einer ganzen Zahl Q die Cubikwurzel zu ziehen.**

Aufl. I. Man theile die Zahl in Classen von drey Zifern, von der rechten Hand gegen die linke. In der höchsten Classe können auch nur eine oder zwo Zifern stehen. Die Wurzel hat so viel Zifern, als Classen herauskommen (39).

II. Aus den beyden höchsten Classen suche man die beyden höchsten Theile der Wurzel (p, q) wie in (34).

III. Was von diesen Classen nach Beobachtung der Regeln in 34 übrig bleibt, nehme man zu der folgenden Classe, und sehe die schon gefundenen Zifern als den ersten Theil der Wurzel $(p+q)$, die, welche man zunächst finden soll r als den andern

an; So findet man die dritte Zifer nach dem II. u. f. Abſ. von 34. Und eben ſo die vierte Zifer ſ wenn man ſie als den andern Theil und die gefundenen drey als den erſten anſieht, und ſo weiter fort, ſo lange noch Zifern zu finden ſind.

Exempel.

Q				p q r ſ
158	164	877	312	(5 4 0 8
$p^3 = 125$				
$R = 33\ 164$				
$3p^2 = (7\ 5)$				
$3p^2q = 30\ 0$				}
$3pq^2 = 2\ 40$				}
$q^3 = 64$				}
$A - p^3 = 32464$				
$S = 700877$				
$3\cdot(p+q)^2 = (8748)$				
$B - A = 0$				
$T = 700877312$				
$3\cdot(p+q+r)^2 = (874800)$				
$3\cdot(p+q+r)^2\cdot ſ = 6998400$				
$3\cdot(p+q+r)\cdot ſ^2 = 103680$				
$ſ^3 = 512$				
$C - B = 700877312$				
0				

Der Beweis iſt in (38) enthalten: die Bedeutung der Buchſtaben A, B, C, iſt wie in (35).

41. Lehrs. Von $\frac{u}{x}$ (24) kann der Würfel keine ganze Zahl seyn.

Bew. Er sey $=q$ einer ganzen Zahl, so ist $\frac{u^3}{x}$ $=qx^2$ eine ganze Zahl. Also müste wie in 24, jedes der drey u einen Factor vom x enthalten, und wenn jedes einen Factor enthält, so enthält es die andern beyden auch; wieder das, was angenommen wird.

42. Zus. Der 26. §. gilt auch von Cubikwurzeln, und überhaupt von Wurzeln aller Grade (I. 47.).

43. Aufg. Aus einer ganzen Zahl, deren Cubikwurzel keine ganze Zahl ist, diese Wurzel durch Näherung zu finden.

Aufl. Wenn man die Wurzel in Zehntheilchen haben will, so sehe man die Zahl als einen Würfel von Zehntheilchen an, der also Tausendtheilchen enthalten muß, d. i. man schreibe an sie, nach der Stelle der Einer, drey Nullen. Und aus eben dem Grunde zweymahl drey Nullen, wenn man die Wurzel bis auf Hunderttheilchen verlangt, und 3 n Nullen, wenn man sie bis auf Decimalbrüche von der Ordnung $-n$ verlangt (II. 9.). Uebrigens verfahre man nach (40) denn man kann solchergestalt die Cubikwurzel als eine ganze Zahl ansehen, deren Einheit von der Ordnung $-n$ ist.

Exempel.

p q r f
4, 0 6 1

67,000 (

$p^3 = 64$

3,000

$3p^2 = (48)$

3,000000

$3.(p+q)^2 = (4800)$

$3.(p+q)^2.r = 28800$

$3.(p+q)\,r^2 = 4320$

$r^3 = 216$

2,923416

76584000

$3.(p+q+r)^2 = (494508)$

$3.(p+q+r)^2.f = 494508$

$3.(p+q+r).f^2 = 1218$

$f^3 = 1$

49462981

27121019

$(p+q+r+f)^3 = 66,972878981$

Probe 67,

44. Anm. Wenn man von allen Zahlen nach der Reihe, die Quadrate und Würfel macht, so entstehen daraus Quadrat- und Cubiktafeln, in welchen man alsdenn eine vorgegebene Zahl die die Grenzen dieser Tafeln nicht überschreitet nur aufsuchen darf, um entweder ihre Wurzel, oder die ganze Zahl, welche der Wurzel am nächsten kömmt, zu finden. Bey den zur Trigonometrie nöthigen Tafeln des Freyh. v. Wolf gehen sie bis auf die Wurzel 1000, also ist das gröste Quadrat daselbst eine Million und der gröste

Würfel

Würfel 100 Millionen. In Joh. Paul Buchners Tabula radicum, quadrator. & cubor. gehen sie bis auf die Wurzel 12000. Joh Ludolfs Tetragenometria tabularia Ien. 1712 enthält nur die Quadrate aller Wurzeln bis auf 100000.

45. Anm. Ein Gebrauch dieser Tafeln ist die ersten Ziffern der Irrationalwurzeln zu finden, wobey man merken muß wieviel Decimalstellen die Potenzen bekommen (III. 9).

Z. E. Man sucht die ersten Ziffern $\sqrt[3]{7}$; Also muß man unter den Würfeln in der Tafel einen aufsuchen, wo 3, oder 6, oder 9 u. s. f. Ziffern nach der 7 folgen. In den Wolfischen Tafeln findet man $7077888 = (192)^3$ also wird $7{,}077888 = (1{,}92)^3$ und da dieses mehr als 7 ist, so nehme man den nächst kleinern Würfel 6967871 der 191 zur Wurzel hat.

Also ist $(1{,}91)^3 = 6{,}967871$ und $\sqrt[3]{7} =$ fällt zwischen 1,91 und 1,92. Vermittelst der Buchnerischen findet man $\sqrt[3]{}$ 6989782528 = 1912 also $\sqrt[3]{7} = 1{,}912$. Die Buchnerischen sind so voller Fehler, daß man sie erstlich durch und durch ausbessern muß, ehe man sie sicher brauchen kann. Die Algebra zeigt Wege, solche Tafeln leicht durch die Addition zu verfertigen.

46. Anm. Wenn man aus einem Decimalbruche oder aus einem Ganzen, an dem Decimalbrüche hängen, die Wurzeln in Decimaltheilen ziehen soll, so muß die gegebene Zahl, Paare von Decimalzifern enthalten, wenn man die Quadratwurzel, und Decimalzifern nach dreyen, wenn man die Cubikwurzel sucht, wenn also bey ihr, wie sie gegeben wird, sich dieses nicht so verhält, so muß man die fehlenden Stellen mit Nullen ausfüllen. Folgt aus I; 77.

Z. E. für $\sqrt{5{,}723}$ könnte man zwar sagen $5{,}723 = \frac{5}{1}\frac{7}{0}\frac{2}{0}\frac{3}{0}$

aber da wäre die Quadratwurzel $\frac{\sqrt{5723}}{\sqrt{1000}}$ daß man beyde

Wurzeln mühsam ausziehen müßte. Drückt man hingegen die Zahl so aus: $5,7230 = \frac{57230}{10000}$ so ist die Quadratwurzel $= \sqrt{\frac{57230}{100}}$. So wäre $\sqrt[3]{7,5} = \frac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{10}}$ aber $\sqrt[3]{7,500} = \frac{\sqrt[3]{7500}}{10}$.

47. Anm. Wenn eine von den Zifern der Zeile A die niedrigste einer ganzen Zahl ist; so ist die darunter stehende Zifer der Zeile B die niedrigste des Würfels dieser Zahl. (29. und 1. 49.).

A;	0;	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8;	9;
B	0;	1;	8;	7;	4;	5;	6;	3;	2;	9;

Hieraus folgt, daß man von jeder Cubikzahl, die nur zwo Classen gibt (34), die beyden Zifern der Wurzel ohne die gewöhnliche Ausziehung finden kann. Die erste gibt sich nach 34. 1. Abs. und die zweyte aus der Endzifer. Z. E. von der Cubikwurzel aus 6,8 503 ist die erste Zifer, vermöge der ersten Classe 8; und die zweyte 7 weil 3 in B unter 7 in A stehet. Dieses geht aber nur an, wo die gegebene Zahl in der That ein Würfel einer Zahl von zwo Zifern ist. Mehrere Betrachtungen über die Endzifern und Regeln, die Rationalwurzeln daraus zu finden, enthält: A. C. v H. ganz neue entdeckte Art, wie aus jeder Cubikzahl, welche nicht über 1000 Billionen geht, die Cubikwurzel zu erforschen: (Dessau 1755): Man kann aber diese Vortheile bey den gemeinen Cubiktafeln grossentheils, und bey den Buchnerischen völlig entbehren. Nach der hier gewiesenen Art läßt sich eine Cubikwurzel aus den gemeinen Tafeln finden, wenn sie vier, und aus den Buchnerischen, wenn sie fünf Zifern hat.

48. Anm. Für die Wurzeln von höhern Graden (I. 47) lassen sich eben so Regeln aus der Zusammensetzung ihrer Potenzen herleiten, die aber in der gemeinen Rechenkunst

nicht

nicht gebraucht werden; und die man im benöthigten Falle zu finden, in der Algebra lernet. S. Clauii Geom. Pract. L. VI. P. 19. und Peschecks Wurzelmann.

49. Anm. Den Irrationalzahlen, die von Wurzeln herrühren (42), kann man sich, soweit man will, nähern (27. 43 48.) daß dasjenige, was noch an dem völligen Werthe einer solchen Zahl mangelt, kleiner wird als jede Grösse, die sich angeben läßt, (data quauis quantitate minus). Und also kann man allemahl Rationalzahlen finden, die sich zu jedem Gebrauche in der Ausübung ohne den geringsten merklichen Fehler statt ihrer setzen lassen: Die Lehrsätze aber von den Rationalzahlen kann man allezeit auch auf diese Irrationalzahlen anwenden, wenn man nur setzt, daß diese Näherung ohne Ende fort geschehen könne. Denn man kann die Irrationalzahl als aus zwey Stücken zusammengesetzt ansehen, davon das eine, ihr Anfang, rational ist, und sich nach Gefallen forttreiben läßt, so daß das andere Stück, ihr Ende, welches in völliger Schärfe immer unbekannt bleibet, doch kleiner wird als jede angegebene Grösse. So beträgt das, was an $\sqrt{3}$ (27) fehlt, weniger als 0,000001. Es sey also X. eine Irrationalzahl, A ihr rationaler Anfang, a ihr unbekanntes Ende, so muß alles von X wahr seyn, was von einer unbestimmten Rationalzahl wie A, wahr ist, denn dieses A kann einen so beträchtlichen Theil von X ausmachen als man will, gegen welchen a immer kleiner und kleiner werden, und also so zu reden verschwinden kann.

50. Anm. Will man also eine Irrationalzahl nach Art der Brüche (I. 53.) durch eine ganze Zahl ausdrucken, so muß man für die Einheit, die sie messen soll, immer kleinere und kleinere Theile der ganzen 1 annehmen, von denen die Irrationalzahl immer grössere und grössere Mengen enthält. So ist $\sqrt{3} = 17 \cdot \frac{1}{10} = 173 \cdot \frac{1}{100} = 1732 \cdot \frac{1}{1000}$ u. s. w. daß immer noch etwas fehlt, und sich die Menge der Einheiten, durch welche $\sqrt{3}$ genau gemessen

würde, so wenig als die Grösse einer solchen Einheit vollkommen angeben läßt. Wenn man die 1 ohne Ende immer in kleinere Theile theilet, und von diesen kleinen Theilen immer grössere Mengen nimmt, so kommt man der Irrationalzahl immer näher, erreicht sie aber nie völlig. Man kann sie also als eine unzählige Menge unendlich kleiner Theile ansehen. Wer ihr dieserwegen den Nahmen einer Zahl abspräche, müßte solches auch bey Brüchen (III. 5.) thun.

51. Anm. Ich habe diese Betrachtungen über die Irrationalzahlen deßwegen ausführlicher vorgetragen, um zu zeigen, daß gewisse Sätze des I. Cap. nicht nur von ganzen Zahlen, sondern von allen überhaupt richtig sind. Die meisten Schriftsteller nehmen diese Allgemeinheit ohne Beweis an, welches mir nicht sorgfältig genug verfahren scheinet. Ich habe dieserwegen diese Sätze I. 82. u. f. von Brüchen umständlich erwiesen. Daß sie nun auch von Irrationalzahlen gelten, folgt daraus, weil man von jeder Irrationalzahl einen so beträchtlichen rationalen Theil, als man will, finden kann, und diese Sätze allemahl von dem ersten Stücke einer Irrationalzahl wahr sind, da nun dieses, so weit man will, getrieben werden kann, so kann das Ende der Irrationatzahl, ihr unbekanntes zweytes Stücke, nichts enthalten, das diese Sätze falsch machte: Denn man kann in dieses zweyte Stücke, so zu reden, so weit man will, hineingehen, und das übrige Unbekannte darinnen, so weit man will, vermindern. Ferner kann man auch die Irrationalzahl, vorhingelehrtermassen, zwischen zwo Rationalzahlen einschränken, die einander so nahe kommen können, als man will, wie $\sqrt{3}$ zwischen 2, 7320508 und fallen

2, 7320509

muß, deren Unterschied nur 0, 0000001 beträgt. Was also von diesen Gränzen, die man nach Gefallen verengern kann, wahr ist, das muß auch von dem dazwischen enthaltenen wahr seyn.

Man

Man setze X, Y, sind zwo Irrationalzahlen, A, B, ihre gefundenen rationalen Theile, a, b, die Enden, die man nie völlig finden wird; so daß $X = A + a$; $Y = B + b$; gesetzt nun I. 10. gelte nicht von Irrationalzahlen, oder es wäre nicht $X.Y = Y.X$, so müßte man, wenn man A und B ohne Ende fortsuchte, nothwendig so weit kommen, daß einmahl A. B nicht = B. A wäre, wieder (I. 83) und so verhält es sich mit den übrigen Sätzen auch.

V. Capitel.

Von den Verhältnissen.

1. Erkl. Wenn man durch die Subtraction untersucht, um wieviel eine Zahl grösser als die andere ist; so betrachtet man diese beyden Zahlen in ihrer arithmetischen Verhältniß; (ratio arithmetica).

$$20 - 5 = 15.$$

2. Erkl. Wenn man aber durch die Division untersucht, wievielmahl eine Zahl in der andern enthalten ist, oder was für ein Theil von einer in der andern steckt, so betrachtet man sie in ihrer geometrischen Verhältniß (ratio geometrica).

$$\frac{20}{5} = 4; \quad \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

3. Anm. Nach dem Gebrauche der Alten gehöret nur der geometrischen, der Nahme Verhältniß; die Neuern haben ihn auch der arithmetischen Vergleichung zwoer Zahlen beygelegt. Daher pflegt man noch allemahl die geometrische Verhältniß zu verstehen, wenn dieses Wort gesetzt wird, ohne eines von beyden Beywörtern hinzuzufügen.

4. Erkl.

4. Erkl. Man sieht in jeder Verhältniß (1. 2) ein Glied als das vorhergehende (antecedens terminus) und das andere als das folgende (consequens) an. Die Ordnung ist vollkommen willkührlich.

5. Zus. Wenn zwey Paar Zahlen einerley Unterschied haben, so hat das vorhergehende Glied zum folgenden bey dem einem Paare eben die arithmetische Verhältniß wie bey dem andern. Und man kann also diese arithmetische Verhältnisse gleich oder ähnlich nennen, weil sie sich durch nichts unterscheiden.

$$20 - 15 = 35 - 30;$$
$$a - (a+d) = b - (b+d)$$

Es schadet nichts, wenn die folgenden Glieder grösser sind als die vorhergehenden (I. 83).

6. Erkl. Die Gleichheit zwoer arithmetischen Verhältnisse heißt eine arithmetische Proportion (proportio arithmetica). Ihr natürlichstes Zeichen ist das, das ihre Erklärung ausdruckt, welches der Freyh. v. Wolf gebraucht. Sonst auch 20. 15. ∴ 35. 30. Sie enthält vier Glieder, da das erste und vierte; (hier 20; 30;) die äusern, das zweyte und dritte die mittlern heissen.

7. Zus. In einer arithmetischen Proportion muß gleichviel herauskommen, wenn man das zweyte Glied vom ersten, und wenn man das vierte vom dritten abzieht. Oder auch wenn man das erste vom zweyten, und das dritte vom vierten abzieht.

(5) Wenn man also das erste und dritte Glied willkührlich annimmt, so muß man beyde um einerley Differenz vergrössern oder vermindern, das zweyte und vierte zu erhalten: dieses zeiget, daß das Exempel in Buchstaben (5) alle arithmetische Proportionen ausdruckt. Sollen die folgenden Glieder der arithmetischen Verhältnisse kleiner seyn als die vorhergehenden, so ist d verneinend.

8. Erkl. Wenn bey einer arithmetischen Proportion das zweyte und dritte Glied einerley sind, so heißt sie **stetig** oder **zusammenhängend** (continua) $12-7=7-2$. Das Glied, das hier zweymahl vorkömmt, heißt das mittlere wie 7, zwischen den beyden äusern 12, 2.

9. Zus. Also ist in (5) $a+d=b$; folglich $b+d=b+2d$; und jede stetige Proportion läßt sich so ausdrücken $a-(a+d)=a+d-(a+2d)$.

10. Lehrs. **In jeder arithm. Proportion ist die Summe der beyden äusern Glieder, der Summe der beyden mittlern gleich.**

Bew. Denn $a+b+d=a+d+b$ (5. 7.).

11. Zus. In der stetigen ist die Summe der äusern noch einmahl so groß als das mittlere, das zweymahl vorkömmt; $a+a+2d=2.(a+d)$ (9)

12. Zus. Man findet also da das mittlere, wenn man die Summe der äusern halbirt. Z. E. zwischen 39 und 47 ist das mittlere Glied $\frac{39+47}{2}=43$ und $47-43=43-39$.

13. Anm.

13. Anm. Dieses Verfahren ist sehr gebräuchlich, wenn von einerley Grösse verschiedene Werthe angegeben werden, deren keinen man vorzüglich zu wählen Grund hat, da man denn solchergestalt einen sucht, der vermuthlich von der Wahrheit nicht weit abweichen kann.

Von der geometrischen Verhältniß und Proportion.

14. Willk. S. Man drücke eine Verhältniß wie einen Quotienten aus (I. 30.); als 20 : 5 das vorhergehende Glied (4) wird zur linken gesetzt.

15. Anm. Die Ursache des Zeichens gibt (8). Indessen sind Verhältnisse und Quotienten nicht einerley, daher man eigentlich dieses Zeichen den ersten allein lassen, und für die letztern nur das (I. 61.) brauchen sollte. Das erste aber ist oft bequemer, und man kann leicht vermeiden, daß keine Zweydeutigkeit entstehet.

16. Erkl. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ so hat a zu b eben die Verhältniß wie c zu d (2). Man kann also diese beyden Verhältnisse ähnlich, oder gleich nennen, oder es ist $a : b = c : d$ (14).

17. Erkl. Die Gleichheit zwoer Verhältnisse heißt eine Proportion. Diese erfodert also vier Glieder. Aeussere und mittlere heissen wie (6). Und wenn $b = c$ heißt sie zusammenhängend oder stetig (8). Die beyden vorhergehenden Glieder a, c, oder die beyden folgenden b, d, heissen jedes Paar für sich, gleichnahmige, oder ähnlich liegende (homologi).

18. Zus.

18. Zus. Ihr natürlichstes Zeichen ist das in (16) und zuerst vom Freyherrn v. Leibnitz gebrauchte, welches die Erklärung selbst ausdrückt (14). Sonst auch a. b :: c. d.

19. Zus. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ so ist auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; also auch d : c = b : a (16).

20. Zus. Wenn F. f = P; so ist 1 : f = F : P (I. 10.) und wenn $\frac{D}{d} = Q$; so ist d : D = 1 : Q (I. 13.). Dieses sind allgemeinere Erklärungen der Multiplication und Division, die auch Brüche (I. 75. 78.) und Irrationalzahlen (IIII. 49.) unter sich begreifen.

21. Lehrs. Wenn zwo Zahlen mit einerley multipliciret oder dividiret werden, so bleiben die Producte oder Quotienten in eben der Verhältniß.

Beweis. Die Producte oder Quotienten geben, mit einander dividirt, eben das, was die Zahlen selbst geben. (I. 61. 65. 67.).

$$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \text{ also } ma : mb = a : b$$

Nun kann m einen Bruch bedeuten, dessen Zähler 1, der Nenner eine ganze Zahl ist, so erhellet der Satz für die Division (I. 61.).

22. Zus. Zweene Brüche verhalten sich wie die beyden ganzen Zahlen, die ihre Zähler abgeben, nachdem

nachdem man sie auf eine Benennung (I. 72.) gebracht hat (I. 53.).

$\frac{7}{3} : \frac{5}{4} = 7 \cdot 4 : 5 \cdot 3 = 28 : 15$

23. Erkl. Verhältnisse heissen rational oder irrational, nachdem der Quotiente (8) beschaffen ist (IIII. 26. 49.).

So ist die Verhältniß $15 : \sqrt{3}$ irrational.

24. Zus. Verhältnisse zwischen Irrationalzahlen können rational seyn; $2\sqrt{3} : 7\sqrt{3} = 2 : 7$ alle Rationalverhältnisse aber lassen sich durch ganze Zahlen ausdrücken (22).

25. Zus. Man kann Irrationalverhältnisse beynahe durch Rationalverhältnisse ausdrücken, und diese Näherung so weit treiben als man will. (IIII. 49.).

Die angegebene ist ohngefähr $= 15 : 1$ genauer $150 : 17$; noch genauer $1500 : 173$. u. s. w. (IIII. 27.).

26. Erkl. Der Exponent oder Nahme (exponens s. nomen) einer Verhältniß heißt die Zahl, welche andeutet, wie vielmahl das vorhergehende Glied im folgenden enthalten ist.

als 4 bey $5 : 20$.

27. Zus. Er kann ein Bruch von beyderley Art seyn, (IIII. 57. 58.) auch eine Irrationalzahl (23) wo man ihn der Wahrheit immer näher und näher ausdrücken kann (IIII. 48.).

Bey $20 : 5$ ist er $\frac{1}{4}$; und $2\frac{1}{9}$ bey $27 : 57$, und $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$ bey $20 : 5\sqrt{3}$; da er also:

0,4; 0,43; 0,433 u. s. w. werden kann.

28. Zus.

28. Zus. Das folgende Glied ist ein Product aus den vorhergehenden in den Exponenten; a : ma.

29. Zus. Zwo gleiche Verhältnisse haben einerley Exponenten (19) und wenn a, ma, b, drey Glieder einer Proportion sind, so muß das vierte mb seyn (17).

30. Zus. Bey der stetigen (17) ist $b = ma$ und $mb = m^2 a$.

31. Lehrs. Wenn vier Zahlen eine Proportion ausmachen, so ist das Product der beyden äußern Glieder dem Producte der beyden mittlern gleich.

Bew. Es sey $A : B = C : D$; so ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (17) also $\frac{A.D}{B.D} = \frac{C.B}{D.B}$ (IIII. 49) und $B.D = D.B$ (IIII. 49.) also $A.D = C.B$;

32. Zus. Wenn $B = C$, ist $A.D = B^2$ und $B = \sqrt{A.D}$. So wird zwischen zwo Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl gefunden: Wenn $A = 1$ also $D = B^2$ so folgt hieraus, daß die Quadratwurzel die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 1 und dem Quadrate; das Quadrat aber die dritte geometrische zu 1 und der Wurzel ist.

33. Lehrs. Wenn zwey Producte gleich sind, so kann man aus ihnen eine Proportion machen, von der das eine Product, welches

man will, die mittlern Glieder, das andere die äuſern gibt. Aus A. D = B. C folgt A : B = C : D.

Bew. Denn es iſt $\frac{A.D}{B.D} = \frac{B.C}{B.D}$; alſo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (IIII. 49.) folglich A : B = C : D (17).

34. Lehrſ. Wenn A : B = C : D ſo iſt

I. Verwechſelt (permutando ſ. viciſſim) A : C = B : D; denn A. D = B. C (31) alſo $\frac{A.D}{D.C} = \frac{B.C}{D.C}$ oder $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$

II. Der vorhergehenden und der folgenden Glieder Summen oder Unterſchiede genommen. (antec. & conſequ. ſummando vel differentiando).

$$A \pm C : B \pm D = A : B.$$

Denn A. D = B. C alſo A. D ± C. D = B. C ± C. D oder (A ± C). D = (B ± D). C; alſo nach (33).

$$A \pm C : B \pm D = C : D = A : B.$$

III. Umgekehrt, conuertendo

$$A : A - B = C : C - D.$$

denn A : C = B : D (I.) alſo

A : C = A − B : C − D (II.) woraus III. nach I. wird.

IIII. Zuſammengeſetzt und getheilt, componendo & diuidendo.

$$A \pm B : B = C \pm D : D.$$

denn

denn A:C=B:D (I.) also
A ± B:C ± D=B:D (II.) also
A ± B:B=C ± D:D (I.).

35. Aufg. Zu drey Zahlen A, B, C, die vierte Proportionalzahl D zu finden; so daß A:B=C:D.

Auflös. Man multiplicire die zweyte und dritte, das Product dividire man durch die erste, so kömmt die vierte.

Bew. D. $A = B.C$ (31) also
$D = \frac{B.C}{A}$ (I. 16.).

36. Zus. Wenn zu zwo Zahlen die dritte (17) gesucht wird, ist B=C und $D = \frac{B.B}{A}$

37. Anm. Man heißt dieses die Regel Detri. Sie ist von unendlichem Gebrauche. Sie setzt zum voraus, daß von den vier Zahlen, von denen die Frage ist, (termini quaestionis) zwo sich wie die zwo übrigen verhalten. Z. E. Mengen von einerley Waare wie ihre Werthe, Arbeiten wie die Zeiten u. s. w.

Als: Wenn 3 Pfund 7 Thlr. kosten, was kosten 50 Pfund?

3 Pf: 50 Pf. = 7 Thlr: $\frac{7.50}{3}$ Thlr:
kömmt 116⅔ Thlr.

Die Rechenmeister pflegen dieses so zu setzen:

3 Pf. — 7 Thlr. — 50 Pf.

und übrigens eben die Regel der Auflösung (35) zu beobachten, daß sie also eben das herausbringen. Weil man

nähmlich 3 ; 5 ; 7, nebst der vierten gesuchten nur als Zahlen, die eine Proportion machen, betrachten darf, ohne daran zu denken, daß sie sich auf verschiedene Einheiten beziehen, so ist diese Verwechselung erlaubt, (34. I.) sonst aber taugt diese Ordnung nichts, weil 3 Pf: 7 Thlr. keine Verhältniß geben kann, da von diesen Dingen keines in denen andern stecken kann. Und die mathematische Ordnung der Glieder hat den Vortheil, daß sie uns gleich darauf führt, die Proportion bey den Zahlen aufzusuchen, wo wir die Regel Detri anbringen wollen, und sie also weder da anzubringen, wo sie nicht hingehöret, noch auch, wo sie hingehöret, sie falsch anzubringen.

38. Anm. In genannten Zahlen ist zuweilen nöthig, die Glieder auf einerley Einheiten zu bringen. Z. E. 3 Pf. 7 Loth: 20 Pf. 13 Loth 2 Quentchen = 7 Thlr. 3 Gr; hier ist das erste Glied = 103 Loth = 412 Quentchen, das zweyte 2614 Qu. das dritte 171 Groschen: also $412 : 2614 = 171 : \frac{171.2614}{412.}$ das vierte Glied wird $1084\ \frac{3}{4}\frac{8}{1}\frac{6}{2}$ Gr. Der Bruch auf Pfennige gebracht, ist nach (I 70. 81.) $\frac{1}{2}\frac{9}{0}\frac{3}{6}$. 12 Pf. $= \frac{193.\ 6}{103} = 11\ \frac{2}{1}\frac{5}{0}\frac{1}{3}$ Pf. und die ganze Zahl 45 Thlr. 4 gr.

39. Anm. Diese Reduction ist nur nöthig, die Verhältnisse zu übersehen, und die Multiplication und Division zu verrichten; man kann sie also ersparen, wenn das erste oder dritte Glied 1; und das eine von diesen beyden keine allzugrosse Zahl ist. Z. E.

1 Pf. kostet 3 Thlr. 8 gr. 6 pf. was 5 Pf.

$$\frac{5}{16\quad 18\quad 6}$$

Ja es findet dieses auch statt, wenn gleich das erste Glied nicht 1 ist. Wenn es hier 3 wäre, so käme das vierte Glied 5 Thlr. 14 gr. 2 pf.

40. Anm.

40. Anm. Wenn sich das erste und zweyte Glied, oder das erste und dritte mit einerley dividiren lassen, so braucht man statt ihrer diese Quotienten, und erhält eben das vierte Glied (21 und 34 l); als

18 : 30 = 33 : x
3 : 5 = 33 : x
1 : 5 = 11 : x; x = 55

41. Anm. Wenn die Zahlen, die gleiche Nahmen haben, um 1 unterschieden sind, gibt es eine Verkürzung, die folgende Exempel lehren

5 Pf. kosten 40 Thl. was 6 Pf. Antw.

$(40 + \frac{40}{5})$ Thlr. = 48 Th. Man kann aber statt dieses Vortheils noch bequemer (40) brauchen. Diese und ähnliche Vortheile heißt man die welsche Practik. Wer viel rechnet und die Gründe der Rechnungen versiehet, erfindet sie selbst, und einem andern ist nichts an ihnen gelegen.

42. Aufg. **Eine Zahl e in zweene Theile zu theilen, die sich wie zwo ganze Zahlen f:g. verhalten.**

Auflös. Man dividire die Zahl durch die Summe der Glieder der Verhältniß; Der Quotient durch beyde Glieder multipliciret, gibt die beyden Theile. Nähmlich $\frac{e}{f+g} \cdot f : \frac{e}{f+g} \cdot g = f:g$ (21) und $\frac{e}{f+g} \cdot f + \frac{e}{f+g} \cdot g = \frac{e}{f+g} \cdot (f+g) = e$.

Ex. Um 21 nach der Verhältniß 2:5 zu theilen, kömmt $\frac{21}{7} \cdot 2 = 6$; $\frac{21}{7} \cdot 5 = 15$; aber 6:15 = 2:5 und 6+15 = 21.

43. Zuf. Wenn drey Theile das Ganze ausmachen und sich wie f, g, h, verhalten sollen, so sind sie $\frac{e}{f+g+h} \cdot f$; $\frac{e}{f+g+h} \cdot g$; $\frac{e}{f+g+h} \cdot h$ u. s. w. bey mehr Theilen.

44. Anm. Es ist klar, daß diese Auflösung sich auf die Regel Detri bringen läßt; Wenn (43) die drey Theile x, y, z, heissen, so ist f + g + h: e = f: x = g: y = h: z (35).

45. Anm. Sie läßt sich auch aus (34) herleiten. Es sey f: g = x: y so ist f + g: g = x + y: y (34. IIII.) oder f + g: x + y = g: y (34. I). Nun sey g: h = y: z oder g: y = h: z (34. I) so ist f + g: x + y = h: z also f + g + h: x + y + z = h: z (34. II) = g: y = f: x (34. I) aber x + y + z = e. Für mehr Theile verfährt man eben so. Für zweene Theile setzet man z = o und h = o.

46. Anm. Die Auflösung gilt für alle Rationalverhältnisse (22) und selbst für die Irrationalverhältnisse (IIII. 51.)

47. Anm. Eine von ihren Anwendungen ist die gemeine Gesellschaftsrechnung; bey der man aus den Gründen der natürlichen Billigkeit annimmt, was Aristoteles von der Austheilungsgerechtigkeit (iustitia distributiua) gelehret hat, und die meisten Rechtsgelehrten, und unter denen auch berufene und verordnete Lehrer der Meßkunst, ohne Verstand entweder nachsagen oder bestreiten. Man setze, drey Kaufleute haben zusammen gelegt

A; 1000 Thlr. = f
B; 700 = g
C; 900 = h

2600 = f+g+h

damit

damit gewonnen 1500 Thlr. = x + y + z; so ist 2600: 1500 = 1000 : x oder nach (40)

$$26 : 15 = 1000 : X ; X = \frac{15.500}{13} = 576\,\tfrac{12}{13}$$

$$= 700 : y ; y = \frac{15.350}{13} = 403\,\tfrac{11}{13}$$

$$= 900 : z ; z = \frac{15.450}{13} = 519\,\tfrac{3}{13}$$

48. Anm. Mit der Gesellschaftsrechnung ist die Vermischungsrechnung (regula alligationis) einerley, wo man findet, wieviel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen Menge der vermischten kömmt, wenn die Verhältnisse der einfachen gegeben sind. Z. E. nach Mieths Geschützbeschreibung II. Th. 40. Cap. gehören bey guten Schießpulver auf 1 Pf. Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel. Wenn man alles zu Lothen macht, und die Zahlen, da es hier nur auf die Verhältnisse ankömmt, halbiret, (21) so kömmt für die drey Dinge in der Ordnung, wie sie genannt sind f = 16; g = 3; h = 2; also f + g + h = 21. Gesetzt nun, man wollte 1000. Pfund Pulver haben, so ist $x = \frac{16000}{21} = 761\,\tfrac{10}{21}$; $y = \frac{3000}{21} = 142\,\tfrac{6}{7}$; $z = \frac{2000}{21}\ 95\,\tfrac{5}{21}$

Die Probe ist, daß die gefundenen Zahlen das gegebene Ganze wie hier 1000 ausmachen.

49. Anm. Zuweilen gehören die ähnlichliegenden Glieder (17) nicht so zusammen wie Waaren und ihr Werth, sondern in einer umgekehrten Ordnung, wenn sich nähmlich ein Paar Grössen verkehrt (reciproce) wie ein Paar andere verhalten. Man nennt dieses die verkehrte Regel Detri, (regula trium inuersa) und die Rechenkunst kann keine Regeln geben, wenn sie anzuwenden ist, sondern man muß solches aus den Begriffen der Sachen selbst wo man

die Regel anbringen will, beurtheilen, daher sich hier die Unentbehrlichkeit der Erinnerung (37) zeigt.

13 Arbeiter vollenden eine gewisse Arbeit in 7 Tagen. Man fragt, wieviel Arbeiter man nehmen muß, eben das in 4 Tagen zu vollenden. Die Zahl dieser Arbeiter mag u heissen. Hier ist offenbahr, daß mehr Arbeiter in der Verhältniß weniger Zeit brauchen, in der ihre Menge grösser ist, daß man also setzen muß

$$4\,\mathfrak{T} : 7\,\mathfrak{T} = 13\,\mathfrak{A} : u$$

$$\text{oder } u = \frac{7.13}{4} = 22\,\tfrac{3}{4}$$

Weil man nicht $\frac{3}{4}$ Arbeiter nehmen kann, (man müßte denn einen, der weniger als die andern arbeitete, dafür rechnen), so muß man die nächst grössere Zahl 23 dafür nehmen.

Die 13 Arbeiter machen in 1 Tage $\frac{1}{7}$ der Arbeit; also macht einer in einem Tage $\frac{1}{7.13}$ der Arbeit; also machen $22\,\frac{3}{4}$ oder $\frac{91}{4}$ in 4 Tagen $\frac{1}{7.13} \cdot 91$ der Arbeit, d. i. die ganze, weil $7.13 = 91$.

60. Lehrs. **Wenn** $a : b = c : d$

Und $e : f = g : h$

So ist $ae : bf = cg : dh$

Bew. Wegen der angenommenen beyden Proportionen ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ (17) also $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}$; folglich $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$ woraus die dritte Proportion folgt (17).

Ex.

Ex. $3 : 6 = 7 : 14$
$5 : 30 = 4 : 24$
$15 : 180 = 28 : 336$

Denn $\frac{15}{180} = \frac{1}{12} = \frac{28}{336}$.

51. Zus. Wenn $e = b$ und $g = d$;
oder $a : b = c : d$
$b : f = d : h$
So ist (21) $a : f = c : h$ (ordinatim & ex aequo).

52. Zus. Eben so sey $b = e$ und $c = h$ oder
$a : b = c : d$
$b : f = g : c$
So ist $a : f = g : d$ (perturbate & ex aequo).

53. Aufg. Wenn eine wirkende Ursache C, in der Zeit T, die Wirkung E hervorbringt, und c, t, e, ähnliche Dinge bedeuten, die Verhältniß der Wirkungen zu finden.

Auflös. Wenn die Ursachen gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen wie die Zeiten; und wenn die Zeiten gleich sind, wie die Ursachen. Nun sey v die Wirkung der Ursache C in der Zeit t, so ist nach diesen beyden Grundsätzen

$T : t = E : v$
$C : c = v : e$ also nach (50. 21.)
$CT : ct = E : e$.

Oder die Wirkungen verhalten sich wie die Producte aus den Ursachen in die Zeiten.

Ex. 7000 Thlr. geben in 12 Jahren 4000 Interesse.
was geben 13000 in 9

Hier ist C = 7000; T = 12; E = 4000;
c = 13000; t = 9; das gesuchte Interesse = e

also 7000. 12 : 13000. 9 = 4000 : e

7. 4 : 13. 3 = 4000 : e

7 : 13. 3 = 1000 : e

$$e = \frac{13.\ 3000}{7} = 5571\tfrac{3}{7}.$$

Man nennt diese Regel, die Regel von fünfen (regulam de quinque) statt ihrer kann eine doppelte Regel Detri dienen, wenn man die Interessen des ersten Capitals in der andern Zeit; das v der Auflös. suchet, und nach den beyden Grundsätzen einzeln verfährt, da man das v aus der ersten Regel Detri, und aus der in der zweyten das e findet. Weil aber v hier oft durch einen Bruch gegeben wird, so ist die Regel von fünfen bequemer. Sonst könnte man auch solche Fälle so berechnen.

7000 Thl. geben in 1 Jahre $\frac{4000}{12} = \frac{1000}{3}$ Interessen;

also 1000 Thlr. in 1 Jahre $\frac{1000}{3.\ 7}$ Interessen;

also 13000 Thlr. in 1 Jahre $\frac{1000}{3.\ 7.}$ 13 und in 9 Jahren $\frac{1000.\ 13.\ 9}{3.\ 7} = \frac{13000.\ 3}{7}$.

54. Anm. Die Aufgabe (53) kömmt unzähligmahl vor; auch wo nicht eben wirkende Ursachen und Wirkungen vorhanden sind, aber doch Dinge, die sich nach den angenommenen beyden Grundsätzen verhalten; z. E. Geschwindigkeiten, Zeiten, Räume; u. s. w.

55. Anm.

55. Anm. Auch fliessen aus der Formel des 53, §. mehr Folgerungen. Es sey E = e; so ist CT = ct oder C: c = t: T (33) welches die Rechnung des Exempels (49) rechtfertiget. Imgleichen ist C: c = $\frac{E}{T}$: $\frac{e}{t}$ (21); wo man aus den Wirkungen, Zeiten und einer Ursache, die andere findet.

Ex. 100 Personen = c; verzehren in 3 Wochen = t; 21 Centner Fleisch = e; wieviel Personen = C; verzehren in 5 Wochen = T; 63 Centner = E; $\frac{21}{3}$: $\frac{63}{5}$ = 100: C also C = 180;

56. Anm. Eine andere Anwendung von (50) zeigt sich bey der Vergleichung verschiedener genannten Zahlen, als Münzen, Maasse, u. s. w. Z. E. Wenn 3 Mariengr. = 2 ggr. und 16 ggr. = 1 Gulden, und 3 Gulden = 2 Thaler, und 11 Thaler = 4 Ducaten, so fragt sich, wieviel Mariengroschen auf den Ducaten gehen: Hier ist

2: 3 = Margr: Gutgr. (33)
1: 16 = Ggr: Gulden
2: 3 = Guld: Thaler
4: 11 = Thaler: Ducaten

2. 1. 2. 4; 3. 16. 3. 11 = Mgr. Duc. Diese Verhältniß ist = 1: 9. 11. = 1: 99. Dergleichen Exempel kommen bey Wechselrechnungen, bey Vergleichungen von Massen, u. s. w. häufig vor. Man hat dieses Verfahren die Kettenregel genannt.

VI. Ca=

VI. Capitel.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse, den Reihen, und den Logarithmen.

1. Erkl. Wenn man zwo Verhältnisse wie a:b; b:e hat, sie mögen gleich oder ungleich seyn, so sagt man, die Verhältniß a:e sey aus diesen beyden **zusammengesetzt** (composita) oder es sey a:e = (a:b) + (b:e) bey welcher Bezeichnung man die Verhältnisse von Quotienten unterscheiden muß, (V. 15.) denn es ist keinesweges $\frac{a}{e} = \frac{a}{b} + \frac{b}{e}$.

2. Anm. Dieser Ausdruck rechtfertiget sich dadurch: Wenn man a mit e vergleichen will, so kann man erstlich a mit b vergleichen, oder sehen, wievielmahl es in b enthalten ist, und alsdenn sehen, wievielmahl b in e enthalten ist, woraus sich denn gibt, wievielmahl a in e steckt, also wird die Verhältniß a: e aus den beyden a: b und b: e bestehen.

3 ist in 12; viermahl und 12 in 60 fünfmahl enthalten. Um also zu finden, wievielmahl 3 in 60 steckt, kann ich erstlich die Verhältniß 3; 12; und denn die Verhältniß 12: 60 untersuchen; das heißt 3: 60 = (3; 12) + (12: 60)

3. Lehrs. **Die Verhältniß eines Products ist aus den Verhältnissen der Factoren zusammengesetzt; oder** ac; bd = (a: b) + (c: d).

Bew. Man kann die Verhältniß c: d allemahl in eine andere verwandeln, deren erstes Glied b ist; wenn man nähmlich sagt c: d = b: $\frac{bd}{c}$ (V. 35).

Nun

Nun nenne man $\frac{bd}{c} = e$; so ist c : d = b : e

also a : b = a : b

c : d = b : e folglich nach (V. 50. 21)

ac : bd = a : e

= (a : b) + (b : e) (1)

= (a : b) + (c : d) (3)

4. Zus. Nach 1. 3. lassen sich auf diese Art mehr Verhältnisse zusammen setzen.

Es sey a : b = a : b

c : d = b : q

e : f = q : r

g : h = r : f

So ist aceg : bdfh = a : f = a : b + b : q + q : r + r : f

= a : b + c : d + e : f + g : h

Die Kettenregel (V. 56.) ist eine solche Zusammensetzung der Verhältnisse. Die zusammengesetzte Verhältniß nähmlich, ist die, welche das Product aller vorhergehenden Glieder zum Producte aller folgenden hat.

5. Zus. fg : gh = f : h + g : g (1) = f : h (V. 21) also ist die Verhältniß der Gleichheit g : g oder 1 : 1 bey der Zusammensetzung der Verhältnisse als o anzusehen.

6. Zus. f : h + g : k + k : g = fgk : hkg (3) = f : h (V. 21.). Also müssen die Verhältnisse g : k und k : g in der Zusammensetzung einander aufheben, folglich einander entgegengesetzt, eine in Absicht

ſicht auf die andere negativ ſeyn. Alſo iſt k:g = − (g:k) oder die verkehrte Verhältniß iſt die negative der ordentlichen; (ratio reciproca eſt directae negatiua).

7. Zuſ. Wenn p:q=q:ſ ſo iſt p:ſ=p:q+p:q=2.(p:q); oder zweymahl ſo groß, die verdoppelte, (duplicata, nicht dupla) von p:ſ; Es ſey p = 1 So iſt ſ = q^2 oder die Verhältniß 1:ſ der 1 zum Quadrate, noch einmahl ſo groß, als die 1:q; der Einheit zur Wurzel. Man kann ſich gleichſam gleiche Schritte vorſtellen, die von 1 bis q, und von q bis q^2 geſchehen, und alſo zwiſchen 1 und q^2 eine noch einmahl ſo groſſe Entfernung geben als zwiſchen 1 und q.

8. Zuſ. p:q = ½ (p:ſ) oder wenn p = 1; 1:q = ½ (1:q^2); das iſt, die Verhältniß der 1 zur Wurzel iſt halb ſo groß (ſubduplicata) als die, der 1 zum Quadrate.

9. Zuſ. Wenn p:q=q:r=r:ſ ſo iſt p:ſ = 3(p:q) und p:q = ⅓(p:ſ) wie vorhin, alſo wenn p=1, die Verhältniß 1 zum Würfel, dreymahl ſo groß (triplicata) als die 1: zur Wurzel; und dieſe ein Drittheil von jener (ſubtriplicata).

10. Erkl. Wenn eine Menge Zahlen, in lauter zuſammenhängenden geometriſchen Verhältniſſen fortgehen, ſo machen ſie eine geometriſche Reihe. Dergleichen iſt 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; u. ſ. f. weil 1; 2=2; 4=4; 8=8; 16 u. ſ. w.

11. Zuſ.

11. Zus. Eine geometrische Reihe ist gegeben, wenn ihr erstes Glied und das zweyte, oder statt dessen der Exponente (V. 26) gegeben sind; denn alle folgende Glieder finden sich durch die Regel Detri (V. 36).

12. Zus. Wenn das erste Glied nicht 1 ist, so dividire man alle Glieder durch dasselbe; dieses gibt eine Reihe, die in eben der vorigen Verhältniß fortgehet (V. 21) und 1 zum ersten Gliede hat.

7; 14; 28; 56; 112; 224; gibt
1; 2; 4; 8; 16; 32;

13. Anm. Dieses, und der vorzügliche Gebrauch, den wir im folgenden von solchen Reihen, deren erstes Glied 1 ist, machen werden, wird mich rechtfertigen, daß ich nur solche Reihen betrachte, die sich auch einfacher ausdrücken lassen.

14. Zus. Wenn das erste Glied einer geometrischen Reihe = 1, das zweyte a, ist, so enthält diese Reihe lauter Potenzen des zweyten Gliedes (V. 36.)

M; 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128;

N; 1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; a^7; .... a^m; a^{m+1}; ... a^n

L; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ... m; m + 1; ... n

Die Reihe M dient zum Exempel und enthält lauter Potenzen der 2; die Reihe N stellt die Sache allgemein vor; und L sind die zugehörigen Exponenten der Potenzen.

Daß lauter Potenzen kommen müssen, erhellt aus V. 35. 36. so: Wenn ein Glied der Reihe N; a^m

a^m heißt, und das ihm nächste x; so ist $1 : a = a^m : x$ (10) also $x = a^{m+1}$ (II. 7.) wenn also ein Glied eine Potenz ist, so ist das nächstfolgende eine, die einen Grad höher ist; aber das zweyte Glied ist eine Potenz, nähmlich die erste, also sind es die übrigen alle.

15. Zus. Von 1 bis a^m sind m Verhältnisse, jede so groß als $1 : a$; oder die Verhältniß $1 : a^m$ besteht aus m solchen Verhältnissen; oder es ist $1 : a^m = m. (1 : a)$ und $\frac{1}{m}. (1 : a^m) = 1 : a$.

16. Zus. Jede Zahl der Reihe L, zeiget an, aus wieviel Verhältnissen die Verhältniß der 1 zu der über ihr stehenden Zahl in M zusammengesetzt ist.

17. Erkl. Wenn unter die geometrische Reihe N; die Reihe der natürlichen Zahlen so untergeschrieben wird, wie L so heißt jede Zahl in L der **Logarithme** der über ihr stehenden in N.

18. Zus. Was für eine Zahl über jeder von L in N stehen soll, ist bestimmt sobald a bestimmt ist, (11) daher kann man sagen, daß die Zahl in L, als Logarithme zu einer gewissen Zahl in N gehöre; ob gleich eigentlich die Zahl in L, die Summe oder Menge der Verhältnisse (αριθμος λογων) ist, die von 1 bis auf die über ihr stehende Zahl in N gehen (16).

19. Zus. Wenn man a ändert, so werden bey eben den L, ganz andere N stehen. Was also zu den Logarithmen für Zahlen gehören, bestimmt sich durch

die

die Zahl deren Logarithme = 1 ist; und eine solche Bestimmung, da durch die Reihe L mit einer bestimmten geometrischen N verbunden wird, heißt ein Logarithmisches System.

20. Lehrs. Wenn zwo Zahlen der Reihe N mit einander multiplicirt oder dividirt werden, so ist der Logarithme des Products, die Summe der Logarithmen der Factoren; und der Logarithme des Quotienten, das, was herauskömmt, wenn von dem Logarithmen des Dividendus, der Logarithme des Divisors abgezogen wird.

Bew. I. $a^m a^n = a^{m+n}$ (II. 7.) aber die Logarithmen der Factoren sind m, n, und des Products m + n (14).

II. $a^{m+n} : a^n = a^m$ (II. 10.); und m + n, n, m, sind wieder die Logarithmen des Dividendus, des Divisors, des Quotienten.

21. Zus. Der Logarithme einer Potenz kömmt heraus, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit der Zahl, die den Grad der Potenz anzeigt, multiplicirt. Denn man sollte ihn so vielmahl, als diese Zahl anzeigt, zu sich selbst addiren. $\log (a^2)^3 = 3 . \log a^2 = 3 . 2 = 6 = \log a^6$ und $(a^2)^3 = a^6$.

22. Zus. Will man aber aus einer Zahl in N die Wurzel eines gewissen Grades ziehen, so muß man der Zahl Logarithmen, durch den Exponenten

des Grades, von dem die Wurzel seyn soll, dividiren, der Quotient ist der gesuchten Wurzel Logarithme. Denn dieser Quotient wird einer Zahl ihr Logarithme seyn, die auf den angezeigten Grad erhoben, die gegebene Zahl zur Potenz hat (21) $\log \sqrt[3]{r}\, a^6 = \frac{1}{3}$. $\log a^6 = \frac{1}{3}.\ 6 = 2 = \log a^2$; und $a^2 = \sqrt[3]{r}\, a^6$.

23. Anm. Die Logarithmen zeigen nähmlich an, ob die Verhältnisse vervielfacht oder dividirt werden (7. 8. 9.).

24. Zus. Wenn man die Reihen M, N, L

$\frac{1}{6^4}$; $\frac{1}{3^2}$; $\frac{1}{1^6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1 M

$\frac{1}{a^6}$; $\frac{1}{a^5}$; $\frac{1}{a^4}$; $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a}$; 1 N

−6 −5 −4 −3 −2 −1 o L

rückwärts fortsetzet, so werden die Exponenten von a; negativ (11. 12.) oder die Zahlen L deuten Glieder auf der entgegengesetzten Seite von 1; an; auch sind die Verhältnisse $1 : \frac{1}{a}$ und $1 : a$; oder $1 : \frac{1}{a^2}$ und $1 : a^2$ u. s. w. einander entgegengesetzt, (5) daß also die Summen der Verhältnisse in gegenwärtigem Absatze, negativ sind, wenn die im (15) positiv angenommen werden.

25. Zus. Wenn $1 < a$; so enthält das Stück der Reihe N in 15 Zahlen die mehr als 1 sind, und das Stück in 24, eigentliche Brüche. Also sind die Logarithmen der eigentlichen Brüche verneinend, wenn die Logarithmen ganzer Zahlen und uneigentlicher

licher Brüche bejahend sind. Die Regel der Division (20. II.) gibt in gehörigen Fällen solche verneinende Logarithmen.

26. Zus. Wenn man zwischen zweyen nächst aufeinander folgenden Gliedern der Reihe N eine mittlere Proportionalzahl (V. 32.) sucht, so halbiret man dadurch die Verhältniß zwischen diesen beyden Gliedern; (8) Wenn also a^m das eine, und a^{m+1} das andere ist, die mittlere Proportionalzahl aber $= p$; so sind von 1 bis a^m; m Verhältnisse jede $= 1 : a$ und von a^m bis p ist eine halbe solche, also sind von 1 bis p; $m + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{2}$ Verhältnisse; der Logarithme also von p muß $\frac{2m+1}{2}$ seyn (17) oder er ist die mittlere arithmetische Proportionalzahl (V. 12.) zwischen den Logarithmen der beyden Zahlen, zwischen denen p die mittlere geometrische ist.

27. Zus. Er ist zugleich, wie nach (17) seyn soll, der Exponent der Potenz, auf welche a muß erhoben werden, damit p herauskömmt. Denn $p = r\, a^m$. a^{m+1} (V. 32.) $= r\, a^{2m+1}$ (II. 7.) $= a^{\frac{2m+1}{2}}$ (II. 9.). Man wird hieraus verstehen, was die Exponenten, die keine ganze Zahlen sind, bedeuten, und wo sie herkommen, nähmlich von Gliedern einer geometrischen Reihe, die man zwischen andere einschiebt, und dadurch die Verhältniß, die man an-

fangs für die Einheit unter den Verhältnissen angenommen hatte, weiter eintheilet.

28. Zus. Wenn man auf eben die Art zwischen p und a^{m+1} die mittlere Proportionalzahl q suchte, so wäre ihr Logarithme und Exponent $= (\frac{2m+1}{2} + m + 1)$. $\frac{1}{2} = \frac{4m+3}{4} = m + \frac{3}{4}$. Man theilte nun nähmlich die Verhältniß zwischen den beyden nächsten Gliedern der Reihe N, in vier Theile ein, daß also allerdings von 1 bis q, $m + \frac{3}{4}$ Verhältnisse wären. Suchte man aber zwischen a^m und p die mittlere Proportionalzahl k, so wäre ihr Logarithme und Exponente $(\frac{2m+1}{2} + m)$. $\frac{1}{2} = \frac{4m+1}{4} = m + \frac{1}{4}$ nähmlich von 1 bis k wären $m + \frac{1}{4}$ Verhältnisse.

29. Zus. Man kann diese Arbeiten weiter treiben, und zwischen q und dem folgenden Gliede der Reihe N, oder k und dem vorhergehenden, mittlere Proportionalzahlen und ihre Logarithmen suchen. Auf diese Art ist klar, daß man jeder Zahl f die zwischen die genannten beyden Glieder der Reihe N fällt, ihren Logarithmen haben kann, wenigstens der Wahrheit so nahe als man zu irgend einem Gebrauche verlangt. Denn nachdem man p gesucht hat, so wird f entweder hinter oder vor p liegen; In jenem Falle sucht man q, in diesem k, und nun liegt im ersten Falle f entweder hinter q, da man zwischen q und a^{m+1} eine neue Proportionalzahl

nalzahl sucht, oder zwischen q und p, da solches mit diesen beyden Zahlen geschieht. Im zweyten Falle liegt f entweder vor k, oder zwischen k und p; und man verfährt eben so. So bekömmt man also immer Zahlen, die näher beysammen liegen zwischen die f fallen muß, und schließt also f zwischen Gränzen ein, die man ohne Ende fort immer mehr und mehr verengern kann; Man kömmt also ohnfehlbar auf eine Zahl, die so wenig von f unterschieden ist, als man nur bey irgend einem Gebrauche verlangen kann, und findet zugleich dieser Zahl Logarithmen, den man für den Logarithmen von f annehmen kann. Da nun jede gegebene Zahl zwischen ein Paar Glieder der Reihe N fallen muß, so lassen sich solchergestalt die Logarithmen aller Zahlen finden. Man braucht nur die Logarithmen der ganzen Zahlen so zu suchen, denn der Brüche ihre findet man aus (20).

30. Anm. Die Logarithmen, deren man sich bedienet, sind wirklich auf diese ungemein mühsame Art berechnet worden. Leichtere Berechnungen und andere Lehren von den Logarithmen, die in der höhern Mathematik von unendlichen Nutzen sind, lassen sich hier nicht vortragen.

31. Zus. Die Reihe N sey folgende

K 1; 10; 100; 1000; 10000;.....

L 0; 1; 2; 3; 4;

und man habe für alle ganze Zahlen K die zugehörigen Logarithmen gefunden (30), so sind die Logarithmen aller zwischen 1 und 10 fallenden Zahlen, eigentliche Brüche. Nun drückt man die Logarith-

men durch Decimalzifern aus. Also fangen sich diese alle mit einer o an, welche die Stelle der Einer ausfüllt. Der zwischen 10 und 100 fallenden Zahlen ihre Logarithmen, müssen also mehr als 1 und geringer als 2 seyn, d. i. zur höchsten Zifer, in der Stelle der Einer; eine 1 haben. So fangen sich die Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000 mit einer 2; derer zwischen 1000 und 10000 mit einer 3 an, u. s. f. Jeder Logarithme nehmlich besteht aus einer ganzen Zahl, und einer Reihe zehntheilicher Brüche; die ganze Zahl, die ich seinen Anfang genannt habe, ist allezeit um eins weniger als die Menge der Zifern, mit welchen die Zahl geschrieben wird, zu der der Logarithme gehöret: Weil man also die Menge dieser Zifern, d. i. die beyden Potenzen von 10 zwischen welche die Zahl, zu der der Logarithme gehört, fallen muß, aus diesem Anfange erkennt, hat man ihn, da er meistens nur eine Zifer hat, die Kennzifer (figura characteristica) genannt, das übrige des Logarithmen (mantissa) gibt die ihm zugehörige Zahl völlig. Dieses übrige befindet sich in den Tafeln nicht ganz, sondern nur die ersten Zifern davon, soviel zum Gebrauche zulänglich sind. Alle Logarithmen, die von 1, 10, 100, 1000, 10000, ausgenommen, sind also nicht völlig genau in den Tafeln enthalten. In den gemeinen Tafeln sind die ersten 7 Decimalzifern von jedem vorhanden. Die letzte von ihnen hat man um 1 vermehrt, wenn die erste der weggelassenen über 5 war.

32. Zus. Wenn der Logarithme L zur Zahl N gehört; so gehört L + 1 zu 10 N; L + 2 zu 100 N u. s. w. Es versteht sich, daß die Addition zur Kennzifer des Logarithmen geschieht.

33. Zus. Wenn man die Zahl N zu welcher der Logarithme gehöret, nicht genau in den Tafeln findet, wenn sie nähmlich keine ganze Zahl ist, dergleichen allein die Tafeln enthalten; so setze man N falle zwischen P und P + 1; welches man daraus sieht, wenn der Logarithme von N zwischen die Logarithmen von P und von P + 1 fällt. Nun suche man die Logarithmen von 10 P und 10. (P + 1) auf, welches eben die vorigen, nur um 1 vermehrt (32) seyn werden; zwischen diese fällt also auch log N um 1 vermehrt; das heißt der Logarithme einer Zahl die 10 N wäre. Aber die Grösse, welche durch N bestimmt wird, läßt sich ungeändert durch 10 N ausdrucken, wenn man statt der ganzen 1, nur 0, 1 zur Einheit nimmt, also findet man solchergestalt diese Grösse in Zehntheilen der angenommenen Einheit, oder zwo in Zehntheilen ausgedruckte Grössen, zwischen welche sie fällt. Und eben so findet man sie in Hunderttheilchen, Tausendtheilchen, u. s. w. wenn man die Kennzifer des log N um 2; 3; u. s. f. vermehrt. Doch schränken die berechneten Tafeln diesen Vortheil ein, da die gemeinsten nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis bis 10000 enthalten; und die grösten nur bis auf 101000 gehen.

Exempel. Die Gewichte zweener gleich grosser Klumpen von Eisen und von Bley verhalten sich (Boerhaav. Chym. T. I. p. 39. ed. Lipſ.) = 7852 : 11345; Nun hat man eine eiserne Kugel, die gleich 1 Pfund wiegt. Die Frage ist, wieviel Pfund eine bleyerne von gleicher Grösse wiegen würde, diese gesuchte Zahl sey = N so ist

$$7852 : 11345 = 1 : N \text{ oder}$$

$$N = \frac{11345}{7852} \text{ folglich}$$

$$lN = l\,11345 - l\,7852 \quad (20)$$

wollte man sich nun hier der gemeinen Tafeln bedienen, so fände man in ihnen l 11345 nicht unmittelbar; Man kann ihn aber doch vermittelst ihrer erhalten, wenn diese Zahl sich in Factoren zerfällen läßt (20). Nun ist sie = 2269. 5; also sage man

$$l\,2269 = 3,3558345$$
$$l\,5 = 0,6989700$$
$$l\,2269.5 = 4,0548045 = l\,11345$$
$$l\,7852 = 3,8949803$$
$$0,1598242 = l\,N$$

Dieser Logarithme, wie er da stehet, aufgesucht, fällt zwischen l 1 und l 2 und zeigt also, daß N zwischen 1 und 2 falle. Man vermehre ihn um 1; oder man suche den Logarithmen 1,1598242 auf; dieser fällt zwischen l 14 und l 15; und zeigt also, daß N zwischen 1,4 und 1,5 fällt. Nochmahls mit 1 vermehrt, fällt der Logarithme 2,1598242 zwischen l 144

und l 145, oder N zwischen 1,44 und 1,45. Endlich der Logarithme 3,1598242 zwischen 1445 und 1446 oder N zwischen 1,445 und 1,446. Man hat also viel leichter als durch die gewöhnliche Division geschähe, herausgebracht, daß die bleyerne Kugel zwischen 1,445 und 1,446 Pfund wiegen muß.

Nähme man der bleyernen Gewichte = 1 Pf. an, und wollte der eisernen ihres = N wissen, so spräche man

11345 : 7852 = 1 : N

lN = l 7852 − l 11345 = — 0,1598242

+ 4,

Q = + 3,8401758

Nähmlich N ist ein Bruch (26). Die Zahl, welcher dieser Logarithme bejahend, wie man ihn vorhin fand, zugehört, kann $\frac{1}{10000}$ angenommen werden. Der negative Logarithme nun ist = o — dem positiven, d. i. (weil l 1 = o) so viel als der Logarithme des Quotienten den 1 mit $\frac{1}{10000}$ dividirt gibt (20) oder = $\frac{10000}{1}$ = $\frac{20000}{2}$ also wöge die eiserne Kugel $\frac{20000}{29}$ Pfund. Will man aber dieses Gewichte in 10000 Theilen eines Pfundes haben; so setze man, statt der 1 welche der bleyernen Kugel Gewicht bedeutete, sey 10000 gesetzt worden; so wäre die Proportion

11345 : 7852 = 10000 : N und

$$N = \frac{10000 \cdot 7852}{11345}$$ oder

lN = l 10000 + l 7852 — l 11345; da nun l 10000 = 4; so findet sich dieses auch, wenn man

das verneinende das l 7852 — l 1 1 345 gibt, gehöriger massen zu 4 rechnet, wie oben zu sehen ist. Die Zahl, welche dem Logarithmen Q zugehöret, ist 6921, also wiegt die eiserne Kugel 0, 6921 Pfund.

Zweytes Exempel.

Man soll $\sqrt[4]{\frac{7364^3}{5499^2}}$ finden. Ich will diese Wurzel = R und die Zahl, aus der sie soll gezogen werden, P heissen.

l 7364 = 3,8671138
multipl. mit 3
11,6013414

Eben so 2 l 5499 = 7,4805674

l P = 4,1207740
div. mit 4 = l R = 1,0301935

l R unter der Kennzifer 3 aufgesucht, gibt R = 10,72:

Eine Probe hiervon kann mit den Buchnerischen Quadrattafeln ohne grosse Mühe so angestellt werden: von 10,72 oder R findet man vermittelst ihrer, das Quadrat = 114,9184 dafür man 114,92 annehmen kann; Und hievon ist das Quadrat 13206,6064 = R^4 = P In grössern logarithmischen Tafeln nun fällt l P zwischen die Logarithmen von 13206 und von 13207.

Drittes

Drittes Exempel.

Man verlangt die Potenz der 2 welche 8192 gibt. Oder es sey $2^x = 8192$ so ist $x \, l\, 2 = l\, 8192$ (21)

$$\text{also } x = \frac{l\,8192}{l\,2} = \frac{3{,}91333899}{0{,}30103000} = 12{,}99.$$

Dieser Quotient ist beynahe 13, und es ist auch eigentlich $x = 13$ wie die Fortsetzung der Reihe M (14) leicht zeiget. Daß aber nicht 13 selbst zum Quotienten herauskömmt, rührt daher, weil man nur mit Stücken der Logarithmen rechnet (31). In solchen Aufgaben, wo der Wehrt der Potenz einer gegebenen Zahl gegeben ist, der Exponent aber gesucht wird, sind die Logarithmen unentbehrlich, das gesuchte sogleich (directe) zu finden, denn der Weg, die Potenzen der gegebenen Zahl nach der Reihe zu machen, würde oft zu unüberwindlichen Rechnungen führen, wenn zumahl die gegebene Wurzel, und x, grosse Zahlen wären.

34. Anm. Die Logarithmen sind von Joh. Neper Bar. v. Merchiston, einem Schottländer, im Anfange des vorigen Jahrhunderts, vornehmlich zu trigonometrischen Gebrauche erfunden worden. S. seine Mirifici canonis logarithmorum descriptio. Edinb. 1614. Benjamin Ursin ist unter den ersten gewesen, der sie den Deutschen bekannt gemacht. S. sein. Cursus Mathemat. practici Vol. I. 1618. Henrich Brigg aber hat sie auf eine bequemere Art eingerichtet, so wie sie jetzo gebraucht werden. Die Trigonometrie giebt hievon weitern Unterricht.

Die

Die Geometrie.

Erklärungen.

1. Die Gränze einer Sache heißt ihr äuserstes, oder wo sie aufhöret.

2. Eine stetige Grösse (continuum) heißt, deren Theile alle so zusammenhängen, daß, wo einer aufhöret, gleich der andere anfängt, und zwischen des einen Ende und des andern Anfange nichts ist, das nicht zu dieser Grösse gehörte.

3. Die geometrische Ausdehnung ist ein Raum, den eine stetige Grösse ausfüllt.

Anm. Es ist nicht nöthig, sich hier in metaphysische Untersuchungen des Raumes und der Stetigkeit einzulassen. Der Begriff der geometrischen Ausdehnung ist ein abstracter Begriff, welcher richtig bleibt, wie man auch sonst diese Dinge sich vorstellen will. Man muß eine stetige Ausfüllung des Raumes annehmen, sobald man auf die besondere Beschaffenheit der Dinge, welche den Raum ausfüllen, nicht sehen will. Aber gegentheils ist niemand berechtiget, die metaphysischen Begriffe nach den geometrischen zu richten, oder die Theilbarkeit ohne Ende, der physischen Ausdehnung beyzulegen, weil sie der geometrischen zukömmt. Bey dieser findet sie statt, weil ihr allgemeiner Begriff der Theilung keine Gränzen setzt. Wo jeder Theil durch nichts als die Grösse und den Ort, von andern unterschieden ist, da kann man aus jedem Theile Dinge, die nicht völlig eben den Ort einnehmen, eben die Grösse haben, neue Theile, machen. In der Natur aber finden wir, daß sich die Theile von einander durch mehr Dinge als durch Grösse und Ort unterscheiden, und also könnte hier etwas die Theilung ohne Ende hindern, die in der Geome-

trie

trie verstattet ist. Die natürliche Logik, und selbst Beyspiele der Geometrie zeigen, daß Bestimmungen bey einem allgemeinen Begriffe statt finden, die ein besonderer nicht zuläßt.

4. **Die körperliche Ausdehnung, ein geometrischer Körper** (solidum; corpus) heißt eine solche Ausdehnung, die das, was sich innerhalb ihrer Gränzen befindet, überall, nach allen Seiten zu umgiebt. Die Ausdehnung der Körper an ihren Gränzen heißt eine **Fläche** (superficies;) und die Ausdehnung der Fläche an ihren Gränzen, eine **Linie** (linea).

Anm. Ein Fisch, der im Innern eines Flusses schwimmt, ist überall mit Wasser umgeben; und kann sich nirgends hin bewegen, ohne Wasser aus der Stelle, wo er hin will, zu treiben. Dieß erläutert den Begriff der körperlichen Ausdehnung. Schwimmt er auf des Flusses Oberfläche, so kann er sich über dieselbe erheben, ohne daß ihm da Wasser im Wege wäre.

Die Wörter Länge, Breite, Dicke, sind dem Sprachgebrauche nach nicht Nahmen verschiedener Ausdehnungen, sondern einer einzigen, der Länge, die nach verschiedenen Richtungen an dem Körper betrachtet wird. Uebrigens enthält die Ausdehnung der Fläche nichts von der körperlichen; welche bey ihr aufhöret. Also können übereinander gehäufte Flächen keinen Körper ausmachen, weil vielmahl Nichts, nie Etwas ausmacht. Eben so kann keine Fläche aus aneinander gelegten Linien bestehen.

5. **Der Punct ist die Gränze der Linie; und also aller Ausdehnung.**

Folglich hat er weder Ausdehnung noch Theile, und eine Menge von aneinandergesetzten Puncten macht keine Linie aus.

Aber die Linie kann aufhören, wo man will; folglich überall in ihrer ganzen Ausdehnung Puncte haben. Und da wir hier durchgängig nur mit Möglichkeiten beschäftiget sind, so ist es gleichviel, ob man sagt: die Linie kann überall Puncte haben; oder: sie hat dergleichen überall. Also darf man überall in der Linie Puncte annehmen. Es ist aber einerley, ob man in der Linie überall Puncte annimmt; oder ob man sich einen einzigen Punct, der nach und nach in verschiedene Stellen der Linie gekommen wäre, vorstellt, denn ein Punct ist von dem andern in nichts unterschieden. Daher sagt man: Eine Linie entstehe aus der Bewegung eines Punctes. Das heißt aber nicht: Sie bestehe aus aneinander liegenden Puncten, denn man kann sich keine Bewegung vorstellen, ohne den Ort, den der Punct jetzo einnimmt, und den Ort, den er im nächsten Augenblicke einnimmt, in einiger Entfernung von einander zu setzen. Diese Entfernung ist schon eine Linie, und die grosse Linie bestehet aus solchen Entfernungen, aus kleinern Linien, nicht aus Puncten.

Anm. Die letzterwähnte Erklärung der Linie bringet natürlich auf die Art, wie sinnliche Bilder von Linien gemacht werden. Man führet die Spitze eines Bleystiftes auf einem Papiere fort: Man sieht diese Spitze als einen Punct an, das heißt, man zieht ihre Grösse in keine Betrachtung. Aber sie läßt Theilchen auf dem Papiere sitzen. Diese Theilchen stellen die Spuren vor, welche ein Punct nach sich lassen würde, der sich eben so bewegte; Sie geben also ein sinnliches Bild der Linie. In der That ist dieser Strich eine Reihe Bleyweisklümpchen, kleiner Körperchen; aber man sieht nicht darauf, wieviel sie sich über

das

das Papier erheben; was für einen breiten Streifen sie auf seiner Fläche bedecken: Man sieht blos, nach was für einer Gegend, nach was für verschiedenen Gegenden sie auf dem Papiere liegen; d. i. man betrachtet an dieser Reihe blos die Ausdehnung der Linie. So stellt ein solcher Strich den Sinnen selbst das Bild einer Linie desto ähnlicher dar, je zärter er ist, je weniger seine Fläche, seine körperliche Ausdehnung in die Sinne fällt, ob sich wohl kein Strich machen oder empfinden läßt, der nur die Ausdehnung einer Linie hätte. In der Ausübung hat man Ursache das Bild der mathematischen Linie so vollkommen als möglich zu machen; d. i. seiner Aehnlichkeit mit dem Originale so nahe zu kommen als sich thun läßt. Oft können die übrigen Ausdehnungen eines solchen Bildes sehr sinnlich seyn, und doch zu einer gewissen Absicht in keine Betrachtung kommen, als wenn man auf dem Felde eine Linie mit einer Schnur anzeigt: Und allemahl kann man Linien finden, wo man die übrigen Ausdehnungen mit Fleiß aus den Augen setzt. Böhmen ist in eine Rundung von Bergen eingeschlossen.

6. Eine **gerade** Linie ist, deren Puncte alle nach einer Gegend zu liegen; AB (1 F.) Eine **krumme** ABCDEF (2 F) in der, zwischen jedem Paare Puncten f, c, so nahe man solche auch annimmt, welche liegen, die sich mit den angenommenen nicht in einer geraaden Linie befinden.

Anm. Die gerade Linie wird niemand aus irgend einer Erklärung kennen lernen, und niemand hat es auch nöthig. Aber man kann wohl etwas von ihr sagen, das die Aufmerksamkeit leitet, auf das, was sie zu einer geraden Linie macht, genauer Acht zu geben. Wenn man in A einen Punct, einen Körper, auf dessen Grösse man nicht sieht, setzet: so kann sich derselbe von seinem Orte nach unzähligen Gegenden bewegen. Sagt man, er soll nach B zu

gehen,

gehen, so ist die Gegend bestimmt, nach der er gehen soll, und er könnte nach eben der Gegend noch über B hinaus nach F gehen. Ginge er von A nach C, so ginge er nach der Gegend, die der ersten entgegengesetzt ist, und sein Weg AC wäre in Absicht auf AB verneinend (Arithm. I. 90.).

Bey der krummen Linie aber, geht der Punct, der sich von A aus bewegt, nicht gleich nach der Gegend zu, nach welcher B in Absicht auf A liegt, sondern nimmt verschiedene ganz andere Wege, deren keiner ihn nach B führen würde, wenn er auf demselben verbliebe. Also wird eine krumme Linie von einem Puncte beschrieben, der sich beständig von der Gegend, nach der er jetzo gehet, in dem nächstfolgenden Augenblicke ablenket, oder seinen Weg beständig ändert.

Die Geometern nehmen hiebey ferner an, daß diese Aenderung nach dem Gesetze der Stetigkeit geschehe. Der Punct hat die Richtung seines Weges von A bis B merklich verändert: Ehe diese Veränderung so groß werden konnte als sie in B ist, mußten alle dazwischen fallende kleinere Veränderungen vorkommen. Der Punct, der eine krumme Linie beschreibet, ändert seine Wege nie plötzlich, wie in der 3. F. aus GH in HI, aus HI in IK, sondern unmerklich, daß sich nicht angeben läßt, um wieviel er jeden Augenblick von dem Wege des vorigen Augenblicks abgewichen ist. So wird er in der 2 F. von CE nicht unmittelbar in EF gehen, sondern den Knoten EdDeE beschreiben, der ihn durch unmerkliche Aenderungen des Weges in E in die Richtung bringt, aus der er sich da weiter ablenket in EF fortzugehen. Also unterscheidet sich die krumme Linie 2 F. von der Zusammenfügung gerader Linien 3 F in zwey Stücken: 1) daß sich dorten kein gerader Theil bestimmen läßt, wie hier GH, HI. IK; 2) daß man dorten nicht bestimmen kann, wie weit die Richtung des beschreibenden Punctes in jedem Augenblicke, von der Richtung im nächstvorhergehenden unterschieden ist.

Weil alle Theile einer geraden Linie AB, BF, (1. F.) nach einerley Gegend zu liegen, so findet man in keinem Theile etwas, das nicht auch in dem Ganzen zu finden wäre; denn das Ganze streckt sich nach eben der Gegend. Nur die Grösse unterscheidet den Theil vom Ganzen; und man kann also sagen, bey der geraden Linie sey jeder Theil dem Ganzen ähnlich. Der Freyh. v. Wolf hat dieses für eine Erklärung der geraden Linie angegeben, und die Aehnlichkeit in eben dem Umstande gesucht, den ich angezeigt habe (El. Geom. Lat. §. 19.). Ich finde nicht, daß ihn dieses in den Stand gesetzt, von der geraden Linie etwas neuers oder gründlichers, als man vor ihm wußte, zu sagen. Uebrigens sind solchergestalt alle gerade Linien einander ähnlich, weil jede ein Theil der grössern werden kann; und alle Theile der krummen Linie sind dem Ganzen unähnlich.

7. **Eine ebene Fläche oder Ebene** (planum) heißt in der man von jedem Puncte zum andern gerade Linien ziehen kann, so daß alle Puncte dieser Linien in der Fläche liegen. 4 F. **Eine krumme Fläche** diejenige, auf der man keinen Theil, der eben wäre, angeben kann.

Anm. Auf der krummen Fläche lassen sich von jedem Puncte zum andern krumme Linien ziehen. Es kann aber auch auf mancher krummen Fläche Puncte geben, durch die sich eine gerade Linie auf ihr ziehen läßt. Betrachtungen, die hier und Anfängern zu erklären zu weitläuftig, und zu schwer seyn würde, hindern mich, dieses als die Erklärung anzugeben. Wenn zwo Ebenen gegen einander geneigt wären, so könnte man durch jeden Punct der einen, nach dem Durchschnitte der Ebenen eine krumme Linie und von dar wieder eine nach jeden Puncte der andern ziehen; und doch machten diese beyden Ebenen keine krumme Fläche. Es ist wahr, diese beyden krummen Linien machten zusammen nicht eine einzige aus. Denn jede krumme Linie, muß

entweder in einer einzigen Ebene bleiben, oder sich nach dem Gesetze der Stetigkeit (6. Erkl.) alle Augenblicke aus einer Ebene in eine andere wenden, wenn sie auf einer krummen Fläche gehet, und eine doppelte Krümmung hat; (courbe à double courbure). Aber durfte ich dieses hier wohl als bekannt zum voraus setzen?

8. Ein ebener Winkel 6. F. ist die Neigung zwoer Linien gegen einander, die in einer Ebene liegen, und nicht eine einzige gerade ausmachen. Ihr Durchschnitt A heißt sein Scheitel, die Linien AB, BC, sind seine Schenkel.

Daher pflegt man ihn durch die Buchstaben BAC zu nennen; wenn man ihn von andern an eben der Spitze, unterscheiden will. Sonst ist es genug die Spitze A zu nennen, oder auch ihn durch einen kleinen hineingeschriebenen Buchstaben x, anzudeuten.

9. Gleichlaufende oder parallele Linien, AB, CD, 7. F. sind gerade Linien in einer Ebene, die nie zusammen stossen, so weit man sie auch auf beyden Seiten verlängert. Zusammengehende (conuergentes) heissen, die verlängert einander schneiden, wie 8. F. BA, DC; wenn diese Linien nach den entgegengesetzten Richtungen AB, CD, betrachtet werden, heissen sie aus einander fahrend (diuergentes).

10. Nebenwinkel 9. F. (contigui, deinceps positi,) sind ABD, ABC, die einen Schenkel AB gemein, und die beyden übrigen Schenkel BD, BC,

BC, in einer geraden Linie DBC nach entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Scheitels B haben.

11. Wenn eine gerade Linie AB 10. F. auf der andern CD so stehet, daß die Nebenwinkel ABD, ABC gleich werden, so heißt sie auf CD **senkrecht** oder **lothrecht** (perpendicularis, normalis;) und die Winkel ABD, ABC, heissen **rechte** (recti). Ein Winkel, der grösser als ein rechter ist, EBD heißt stumpf, ein kleinerer EBC spitzig.

12. Eine mit Linien begränzte Fläche heißt eine **Figur.**

13. Ein **Kreis** (circulus) entstehet, wenn sich die Linie CA 11. F. um den vesten Punct C herumdrehet, bis sie wieder in die vorige Lage kömmt. Des Punctes A Weg ADBFGH heißt des Kreises **Umfang** (peripheria) der Raum, über den CA weggestrichen ist, seine **Fläche**, C der **Mittelpunct** (centrum). Jede Linie durch den Mittelpunct, so viel von ihr zwischen dem Umfange enthalten ist BCA, der **Durchmesser.** Einer solchen Linie Hälfte CA = CB der **Halbmesser** (semidiameter s. radius) Linien, die von dem Umkreise begränzt werden, ohne durch den Mittelpunct zu gehen FG, GH, FH, **Sehnen** (Chordae); das Stück der Kreisfläche zwischen einer Sehne FH und den Bogen FGH ein **Abschnitt** (segmentum) und wenn sich die Sehne in den Durchmesser BCA verwandelt, ein **halber Kreis**; die Fläche, die zwischen zween Halbmessern

DC, CE, und ihren Bogen DE enthalten ist, ein Ausschnitt (sector).

Der Winkel des Abschnittes heißt, den die Sehne FH mit dem Bogen FG macht; der Winkel im Abschnitte FGH der seinen Scheitel irgendwo in des Abschnittes Bogen hat, und mit den Schenkeln durch der Sehne Enden streicht; ihn enthält der genannte Abschnitt, er stehet aber auf dem übrigen Bogen FDEH. Aehnliche Abschnitte enthalten gleiche Winkel.

Wenn eine Linie wie TA an den Kreis so antrifft, daß sie ihn, verlängert nicht schneidet, oder nichts von seinem Umfange wegnimmt, heißt sie eine Tangente.

Alle Halbmesser sind gleich, nähmlich jeder = CA: daher auch alle Durchmesser.

14. Ebene Figuren, die in gerade Linien als Seiten eingeschlossen sind, heissen geradelinicht. Dreyecke (triangula) die drey Seiten haben; Vierecke, die vier, Vielecke (polygona) die mehr haben.

Anm. Man nennt im Deutschen wie im Griechischen die Figuren nach der Zahl der Winkel; im Lateinischen nach der Zahl der Seiten; Fünfeck, Sechseck, Siebeneck ꝛc. pentagonum, hexagonum, heptagonum &c.

15. Ein gleichseitiges Dreyeck (aequilaterum, isopleuron) hat alle drey Seiten von einer Grösse.

12. F. Ein gleichschenklichtes (aequicrurum, isosceles) zweene gleiche Schenkel AC, CB über

der

der **Grundlinie** AB; 13. F. ein **ungleichseitiges** (scalenum) keine Seite der andern gleich 14. F.

Rechtwinklicht heißt ein Dreyeck, das einen rechten Winkel hat, **stumpfwinklicht**, das einen stumpfen hat, **spitzwinklicht**, das lauter spitzige hat. 15. 16. 17. F.

16. Ein **Quadrat** ABCD (18. F.) hat vier gleiche Seiten und so viel rechte Winkel. Ein **Rechteck** (rectangulum) rechte Winkel und ungleiche Seiten; 19. F. Eine **Raute** 20. F. (Rhombus) gleiche Seiten und schiefe Winkel, eine **länglichte Raute** (Rhomboides) die einander gegenüberstehenden Seiten gleich groß, aber weder alle Seiten gleich, noch lauter rechte Winkel (21. F.); Andere Vierecke heissen ungleichseitige Vierecke (Trapezia) 22. F.

17. Ein **Parallelogramm** hat vier Seiten, da die gegenüberstehenden gleich sind.

18. Ein **ordentliches Vieleck** (regulare) 23. F. hat lauter gleiche Seiten und Winkel; andere heissen unordentliche 24. F.

19. Wenn in zwo Figuren einerley Winkel in einerley Ordnung nach einander folgen, und die Seiten, welche einerley Winkel in beyden Figuren einschliessen, ebenfalls in einerley Ordnung Proportionen ausmachen, so heissen diese Figuren ähnlich.

20. Eine Figur heißt **in einem Kreise beschrieben** (inscripta circulo) wenn sich die Scheitel aller ihrer Winkel in des Kreises Umfange befinden; und der Kreis heißt alsdenn **um die Figur** beschrieben (circumscriptus) 23. F. Wenn aber alle Seiten einer Figur den Umfang eines Kreises berühren, heißt er in sie, und sie um ihn beschrieben 25. F.

Mit allen diesen Erklärungen, wollen die Geometern nicht sagen, daß solche Dinge vorhanden oder möglich sind. Sie bestimmen nur die Bedeutungen ihrer Wörter. Die Folge muß zeigen, ob diese Wörter Zeichen von Begriffen oder leere Töne sind.

Foderungen (Postulata).

1. Durch jede zweene gegebene Puncte eine gerade Linie zu ziehen, und solche nach Gefallen zu verlängern.

Durch jede zweene Puncte einer geraden Linie ist ihre Lage (positio) gegeben (6. Erkl.) durch ihre Endpuncte auch die Länge (magnitudo).

2. Aus idem Mittelpuncte mit jedem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben.

Grundsätze (Axiomata).

1. Durch zween Puncte geht nur eine gerade Linie. (6. Erkl.) Also schliessen zwo gerade Linien keinen Raum ein.

2. Wenn

2. Wenn zwo gerade Linien zusammen stossen, ohne eine einzige gerade Linie auszumachen, so haben sie nichts gemein als einen Punct, verlängert schneiden sie einander in diesem Puncte, so daß von jeder Linie etwas auf beyden entgegengesetzten Seiten des Punctes ist.

3. Grössen, die dergestalt auf einander können gelegt werden, daß jeder Gränzen, und alles, was dazwischen enthalten ist, auf die Gränzen und das dazwischen enthaltene der andern fallen, sind gleich und ähnlich. Man sagt von ihnen, daß sie einander decken (congruunt).

4. Gerade Linien und Winkel, die gleich sind, decken einander.

Grössen, die einander decken, können eine völlig in den Raum der andern gesetzt werden, also ist unter ihnen für die geometrische Betrachtung kein Unterschied.

5. Alle rechte Winkel sind gleich, denn sie decken einander (11. Erkl.).

6. Der Durchmesser D A 26. F. theilet den Kreis in zwey ähnliche und gleiche Stücke, D B A, D b A;

Denn wenn man sich das Stück D B A unter D A gelegt vorstellt, daß die Puncte D, A und folglich die Linie D A (1. Grundf.) ungeändert bleiben, so muß jeder Punct des Umfanges des herunter gelegten Stückes D B A am Ende einer Linie liegen, die durch C gehet und dem Halbmesser gleich ist, (13. Erkl.) aber

am Ende jeder solcher Linie liegt ein Punct des Umfanges des Stückes DbA; also fällt jeder Punct des einen Umfanges auf einen Punct des andern, oder beyde Umfänge decken einander; die Linie DA aber ist die andere Gränze dieser beyden Stücken der Kreisfläche, und beyden gemein, also sind beyde gleich (3. Grundſ.).

Wenn man von einem Puncte des Umfanges B; die Linie BC zieht, so deckt der Winkel BCA, den ihm gleichen bCA (4 Gr.) und so fällt jeder Punct des einen Halbkreises auf einen eigenen des andern.

7. Der Umfang eines Kreises um den Mittelpunct A, 27. F. ist eine zusammenhängende krumme Linie; wenn also von der geraden Linie BC, ein Punct wie B innerhalb des Umfanges, d. i. näher bey dem Mittelpuncte ist als des Kreises Halbmesser beträgt, und ein anderer C ausserhalb des Umfanges; so schneidet die gerade Linie den Umfang des Kreises. Eben das folgt, wenn das vorige von den Puncten K, F, eines andern Kreises angenommen wird.

8. Eine unbegränzte gerade Linie AB 28. F. theilet die unbegränzte Ebene, in der sie gezogen ist, in zweene Theile, die an ihren entgegengesetzten Seiten liegen.

Zusatz. Es ist möglich, aus jedem gegebenen Puncte F, einen Kreis zu ziehen, der eine gegebene gerade unbegränzte Linie in mehr als einem Puncte schneidet.

Nach einem willkührlichen Puncte der Linie, O, ziehe man F O, und beschreibe mit einen grössern Halbmesser F P, einen Kreis, dessen Durchmesser P Q sey. Der Halbkreis (6. Grundſ.) der von Q P nach B zu liegt, hat P unter A B, und Q darüber, und muß also diese Linie schneiden, wenn er zusammenhängend von P nach Q kommen soll. Eben so hat der Halbkreis, der von P Q nach A zu lieget, P über A B, Q, darunter, und muß diese Linie wieder schneiden, von einem Puncte zum andern zu kommen.

Eine gerade Linie die durch einen Punct innerhalb eines Kreises geht, schneidet ihn wenigstens in zween Orten.

Ist der Punct der Mittelpunct, so ist sie ein Durchmesser, und die Sache erhellt aus 13. Erkl.

Ist es ein anderer Punct O; so ziehe man durch ihn den Durchmesser Q P; der Halbkreis der sich auf jeder Seite desselben befindet (6) schließt mit ihm einen Raum ein, aus welchem das Stück gerade Linie, das sich auf eben der Seite (8) befindet, nicht heraus kann ohne ihn zu schneiden.

I. Satz. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie A B ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben. 29. F.

Aufl. Man beschreibe aus den Mittelpuncten A, B, mit den Halbmessern A B, B A, Kreise, die

einander in C schneiden; (2. Foder.) und ziehe nach C von A, B, gerade Linien; (1. Foder.) so ist ACB das verlangte Dreyeck.

Bew. Wenn es einen Durchschnitt C gibt, so ist AC = AB (13. Erkl.) = BC;

Daß es aber einen Durchschnitt gibt, erhellt so: Man verlängere AB, biß BD = AB (1. Foder.) so geht der Kreis um B, durch D (13. Erkl.) einen Punct auserhalb des Kreises um A, (weil AD = 2AB) und auch durch A, einen Punct innerhalb desselben; folglich schneidet er jenen Kreis (7. Grundsz.)

2. Satz.

Wenn (30. F.) zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, in einem Dreyecke so groß als in dem andern sind; so ist alles in beyden Dreyecken gleich.

Bew. Es sey AB = ab, AC = ac, A = a; Man lege das zweyte Dreyeck so auf das erste, daß a auf A und ab längst AB fällt, so fällt b auf B (3. Grundsz.) und ac längst AC (4. Grundsz.) und c auf C (3. Gr.) also decken bc, BC, und die Winkel b, B; c, C, auch der Dreyecke ganze Flächen einander, oder alles dieses ist gleich.

1. Zus. Zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen ein Dreyeck.

2. Zus. Es sey AB = AC, und ab = ac oder beyde Dreyecke seyen gleichschenklicht, so kann man abc auser der vorigen Lage auch noch so auf ABC

legen,

legen, daß a wieder auf A, aber ab längst AC fällt; Alsdenn fällt noch ac längst AB, (4. Grundſ.) und b auf C, c auf B, (3. Grundſ.) alſo decken beyde Dreyecke auch einander in dieſer Lage, und es iſt b = C; c = B; (3. Grundſ.) wegen der vorigen Bedeckung aber war b = B, c = C; alſo iſt C = B;

3. Zuſ. In einem gleichſchenklichten Dreyecke ABC, ſind die Winkel an der Grundlinie gleich. Denn man kann ſich eben das Dreyeck noch einmahl vorſtellen, abc, und die beyden Bedeckungen betrachten.

3. Satz. Lehrſatz.

Wenn in zweyen Dreyecken, 30. F. B = b, C = c, und BC = bc; oder eine Seite mit den anliegenden Winkeln in einem wie in dem andern iſt, ſo iſt alles übrige gleich.

Bew. Man lege den Punct b auf B und bc längſt BC, ſo fällt der Punct c auf C (3. Gr.) und ba längſt BA, ca längſt CA (4. Gr.); Alſo liegt a zugleich in BA und in CA, folglich auf A (3. Gr.) und die Dreyecke decken einander wie vorhin, alſo iſt A = a; BA = ba, Ac = ac;

1. Zuſ. Wenn B = C alſo auch b = c, ſo kann man die Dreyecke auch ſo auf einander legen, daß c, B, und b, C, einander decken, und noch fällt a auf A. Alſo iſt nun ca = BA; ba = CA, folglich BA = CA.

2. Zuſ.

2. Zus. Wenn in einem Dreyecke A B C die beyden Winkel an der Grundlinie B, C, gleich sind, so sind auch die beyden Seiten B A, C A, gleich.

3. Zus. In einem gleichseitigen Dreyecke, sind alle drey Winkel gleich (2. S. 3. Zus.) und wenn in einem Dreyecke alle Winkel gleich sind, ist es gleichseitig (3. S. 2. Z.).

4. Zus. Ein gleichseitiges Dreyeck ist eine reguläre Figur (18. Erkl.).

4. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken alle Seiten gleich sind; B A = b a; B C = b c; A C = a c; so ist alles in beyden Dreyecken gleich.

Bew. Man lege b c dergestalt auf B C, (3. Gr.) daß a und A auf verschiedene Seiten dieser Linie fallen. So kann man jetzo dreyerley Lagen für den Punct a annehmen; In der verlängerten Linie A C 31. F. oder so daß A a innerhalb des Winkels B A C 32. F. oder daß sie ausserhalb desselben 32.* F. fällt.

1. Lage. Weil B A = b a so ist A = a (1. S. 3. Z.) folglich △ B A C = △ b a c (2. S.).

2. Lage. Da B und C auf verschiedenen Seiten von A a liegen, so ist B A C = B A a + a A C und b a c = b a A + A a c; aber B A a = B a A; a A C = A a c also B A C = b a c; und die Dreyecke wieder gleich.

3. Lage.

3. Lage. BAC=BAa−CAa; bac=baA−caA und BAa=baA; CAa=caA.

1. Zus. Aus drey Seiten läßt sich nur ein Dreyeck machen, ob man solchem gleich verschiedene Stellungen geben kann.

2. Zus. Im 2. 3. 4. S. stehen gleiche Seiten gleichen Winkeln und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber.

5. Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel EAF zu halbiren 33. F.

Aufl. Auf seinen Schenkeln nehme man nach Gefallen AB=AC; ziehe BC und beschreibe darüber das gleichseitige Dreyeck BDC; (1. S.) so wird AD den Winkel halbiren.

Bew. Weil vermöge der Verzeichnung AB=AC, BD=DC; und AD den Dreyecken ABD, ADC, gemein ist, so ist BAD=DAC (4. S.) $= \frac{1}{2}$ EAF.

Zus. Durch neues Halbiren läßt sich der erst vorgegebene Winkel in 4, 8, 16, u. s. f. Theile theilen, so daß die nte Arbeit 2^n Theile gibt.

6. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie AB zu halbiren 34. F.

Aufl. Ueber ihr beschreibe man ein gleichseitiges Dreyeck, und halbire dessen Winkel ACB; die Linie CE die solches thut, halbiret AB in E.

Bew.

Bew. Die Linie, welche den Winkel halbiret, geht zwischen seinen Schenkeln, und muß also irgendwo zwischen A und B, die Linie AB schneiden. Es geschehe dieses in E. In den Dreyecken ACE, CEB, ist AC=CB, CE=CE, ACE=ECB; also AE=EB (2. S.).

Anm. Die Halbirung geschieht, wenn man auf beyden Seiten von AB, gleichseitige Dreyecke beschreibt, und durch ihre Spitzen CD zieht (5. S.).

1. Zus. Der Zusatz voriger Aufgabe findet auch von der geraden Linie statt.

2. Zus. CEA = CEB = R (welches Zeichen einen rechten Winkel bedeuten soll) (11. Erkl.).

7. Satz. Aufgabe.

I. Durch einen gegebenen Punct C, auf eine gegebene unbegränzte Linie AB, ein Perpendikel aufzurichten 35. F.

II. Aus einem gegebenen Puncte C auf eine gegebene unbegränzte Linie AB ein Perpendikel zu fällen 36. F.

Aufl. Man beschreibe aus C einen Kreis, der AB in M, N, schneidet, und über MN ein gleichseitiges Dreyeck; MND, so ist DC das gesuchte Loth.

Beweis. I. Aus C kann man allerdings auf beyde Seiten CM=CN nehmen. Also ist das gefoderte möglich. Nun haben die Dreyecke CMD, CND, einerley Seiten vermöge der Verzeichnung; also

also auch einerley Winkel (4. S.) also ist DCM =DCN=R (11. Erkl.).

II. Die Möglichkeit der Foderung erhellt aus des 8 Grundsatzes Zusatze. Man ziehe CM, CN; so haben die Dreyecke DCM, DCN; DC gemein, und DM = DN, CM = CN; also die Winkel MDC=NDC (4. S.). Weil also in den Dreyecken MDE; NDE, DE gemein; DM = DN und MDE = NDE, so ist DEM = DEN (2. S.) =R (11. Erkl.).

8. Satz. Lehrsatz.

Die beyden Nebenwinkel EBD, EBC, 37 F. betragen allezeit zusammen so viel als zweene rechte.

Bew. Man richte durch B auf CD das Loth BA auf (7. S.). Wenn die beyden Nebenwinkel nicht jeder ein rechter sind; da der Satz ohnedem in die Augen fällt, so muß einer von ihnen entweder stumpf, oder spitzig seyn. Es sey einer stumpf, oder EBC > R weil nun CBA = R = ABD; so ist EBC = R + ABE; und der Nebenwinkel EBD = R - ABE also beyde zusammen =2 R.

Ist einer spitzig wie EBD=R-ABE so ist sein Nebenwinkel EBC = R + ABE.

1. Zus. Wenn zweene Winkel EBC, EBF, den Schenkel EB gemein haben, und zusammen = 2R sind, so sind es Nebenwinkel, oder BF ist die Verlängerung von CB; Denn man setze, sie sey es nicht,

und

und verlängere CB in D, so ist CBE + EBD = 2R = CBE + EBF, wie angenommen wird; also EBD = EBF, daher diese gleichen Winkel einander decken.

2. Zus. Alle Winkel, die an einer Spitze H, auf einer Seite der Linie GK 38. F. liegen, machen zusammen zween rechte. Denn einige von ihnen machen zusammen den einen rechten LHK, die übrigen den andern LHG. Und alle Winkel um einen Punct ringsherum machen zusammen vier rechte.

3. Zus. Von zween Nebenwinkeln, deren keiner ein rechter ist, ist allezeit einer spitzig, der andere stumpf.

4. Zus. Scheitelwinkel sind gleich; oder ACE = BCD 39. F. Denn ACE + ECB = 2R = ECB + BCD.

9. Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreyecke 40. F. eine Seite BC verlängert wird, so ist der äusere Winkel ACD grösser als der innere BÂC welcher der verlängerten Seite gegenüber stehet.

Beweis. Man halbire ÂC in E, und ziehe BE auf deren Verlängerung man EF = BE nehme; Weil F über BCD, und von AC nach der Seite D zu liegt, so ist ACF < ACD; aber in den Dreyecken AEB, FEC, sind die eben so genannten Winkel gleich (8. S. 4. Z.) und EF = BE; EC = AE; also BAE = ECF (2. S.) und folglich kleiner als ACD.

1. Zus. AC in CG verlängert gibt auf eben die Art BCG > ABC; Aber BCG = ACD (8. S. 4. Z.) also ist der äusere Winkel ACD grösser als jeder der beyden innern ihm entgegengesezten (oppositorum) von denen nehmlich keiner sein Nebenwinkel ACB ist.

2. Zus. BAC + ACB < ACD + ACB; die lezte Summe aber ist = 2 R (8. S.) also ist die erste < 2 R. Von ABC + ACB erhellt es eben so; imgleichen von BAC + ABC wenn man BA verlängert.

3. Zus. In einem Dreyecke, das einen rechten Winkel hat, sind die beyden andern spizig; und eben so, wenn es einen stumpfen hat. Dieses zeigt, wievielerley Dreyecke, in Absicht auf die Winkel möglich sind (15. Erkl.).

4. Zus. Auf eine gegebene Linie, gibt es von einem Puncte auser ihr (3. Z.) und durch einen Punct in ihr (8. S.) nur ein einziges Perpendikel.

5. Zus. Wenn MCN 36. F. ein gleichschenklichtes Dreyeck, C seine Spize, und E mitten in der Grundlinie MN ist; so halbiret CE den Winkel MCN und steht auf MN senkrecht (4. S. 11. Erkl.) und ein Perpendikel von C auf MN ist CE (4. Z.) und eine Linie, die MCN halbiret, ist CE.

6. Zus. In einem Dreyecke ABC 41. F. sey AC > AB so ist ABC > C; denn man nehme AD = AB so fällt D zwischen A und C, also ist

$ABD \prec ABC$; aber $ABD = ADB$ (2. S. 3. Z.) und $ADB \succ C$ (9. S.) also noch vielmehr $ABC \succ C$.

Umgekehrt, wenn $ABC \succ C$ so ist $AC \succ AB$; denn wären beyde Seiten gleich, so wären die Winkel auch gleich, und wäre $AB \succ AC$, so wäre $ACB \succ ABC$.

7. Zus. Im Dreyecke der 42. F. nehme man $AD = AC$ auf der verlängerten BA; so ist $DCB \succ DCA$; und $DCA = D$ (2. S. 3. Z.) also $DB \succ BC$ (6. Z.) das ist $CA + AB \succ CB$; dergleichen Verfahren bey C, und bey B, beweiset $AC + CB \succ AB$ und $CB + BA \succ AC$; oder daß allemahl zwo Seiten eines Dreyecks, welche man will, zusammen grösser als die dritte sind.

8. Zus. Aus drey Seiten, wo es voriger Zus. verstattet, läßt sich ein einziges Dreyeck (4. S.) wie im 1. S. zeichnen.

9. Zus. Wenn innerhalb des Dreyecks BAC 43. F. der Punct D genommen wird; so ist $BDC \succ A$ aber $BD + DC \prec BA + AC$; Man verlängere BD bis sie AC in E schneidet; so ist $BDC \succ DEC$ und $DEC \succ A$ also $BDC \succ A$; ferner $BA + AE \succ BE$ oder $\succ BD + DE$ und $DE + EC \succ DC$ also $BA + AE + DE + EC \succ BD + DE + DC$ und wenn man DE auf beyden Seiten abziehet $BA + AC \succ BD + DC$.

10. Zus.

10. Zus. Von einem gegebenen Puncte C 44. F. ist die kürzeste Linie an eine gegebene Linie BD, die Entfernung; das Loth CA. Denn wenn man jede andere Linie CF zieht, so ist der Winkel CFA $\lessdot$ A (3. Z.) also CF $\gtrdot$ CA (6. Z.).

11. Zus. Auf jeder Seite des Lothes CA 44. F. gibt es nur eine Linie durch C, die mit BD einen gegebenen Winkel macht. Es sey CFA dieser Winkel, so ist für jeden Punct H zwischen F und A; CHA $\gtrdot$ CFA und für jeden Punct G über F hinaus CGA $\lessdot$ CFA (9. S.); Nimmt man aber auf der andern Seite AM = AF, so ist AMF = CFA (2. S.); wäre ein stumpfer Winkel gegeben gewesen, so hätte man solchen CFB gleich gesetzt. (8. S.).

12. Zus. Wenn F weiter von A liegt als H, so ist CFH $\lessdot$ CHA (9. S.) und beyde diese Winkel sind spitzig (3. Z.) folglich CHF stumpf (8. S. 3. Z.) und grösser als CFH; also CF $\gtrdot$ CH (6. Z.).

13. Zus. Wenn FCA ein gegebener spitziger Winkel ist, so kann man durch C Linien ziehen, die mit CA grössere oder kleinere Winkel machen, nachdem man G oder H nimmt.

14. Zus. Wenn in zwey Dreyecken (45. F.) A = a, C = c, und AB = ab; so ist alles übrige gleich. Man lasse von B, b, die Lothe BD, bd, auf AC, ac, und lege das eine Dreyeck auf das andere, so daß a auf A, b auf B, und ac längst AC hinfällt, so müssen die Lothe BD, bd, einander decken und auf

D fallen (4. Zuf.) und c liegt auf eben der Seite von BD auf der C liegt, weil BCD; bcd; allemahl spitzig sind (3. Zuf.) und wenn c nicht auf C fällt, so giebt es zwo Linien durch B oder b, die mit AC auf einer Seite des Lothes gleiche Winkel c=C machen; wieder den 11. Z. Folglich fällt c auf C und die Dreyecke decken einander wie im 3. S. von dem gegenwärtiges die Ergänzung ist; daß nehmlich zweene Winkel und eine Seite allemahl nur ein Dreyeck bestimmen.

10. Satz. Aufgabe.

An einer gegebenen Linie ac 45. F. gegebenen Punct a; einen Winkel zu machen, der einem gegebenen A gleich ist.

Auflöf. Man ziehe nach Gefallen durch die Schenkel von A eine Linie BC um ein Dreyeck ABC zu bekommen; Nun beschreibe man über ac ein Dreyeck, das eben die Seiten ac = AC; bc = BC, ab = AB hat (9. S. 8. Z.) so wird a = A seyn (4. S.).

11. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwo Linien AB, CD, 46. Fig. von einer dritten so geschnitten werden, daß 1) die beyden innern entgegengesetzten Winkel BGH + GHD = 2R oder II) der äusere EGB = GHD dem innern entgegengesetzten, oder III) die Wechselswinkel DHG = HGA; so sind AB, CD, gleichlaufend.

Bew.

Bew. Stiessen AB, HD, nach der Seite B, D, von GH zusammen; so gäbe es ein Dreyeck, dessen Grundlinie GH, die beyden Seiten GB, HD, bis zum Zusammenstossen verlängert wären. Von diesem Dreyecke wären also die beyden Winkel an der Grundlinie zusammen = 2 R wieder 9. S. 2. Z.

Weil AGH + HGB = 2 R = CHG + GHD, so ist AGH + HGB + CHG + GHD = 4 R und davon HGB + GHD = 2 R abgezogen, bleibt AGH + CHG = 2 R; Also kann auch nach der Seite A, C, von GH zu, kein Dreyeck von den verlängerten GA, HC, gemacht werden.

II. Wenn EGB = GHD so ist HGB = 2 R — EGB = 2 R - GHD oder HGB + GHD = 2 R.

III. Wenn AGH = GHD, so ist HGB = 2 R - AGH = 2 R - GHD, und HGB + GHD = 2 R.

Ein Satz von diesen dreyen angenommen hat die übrigen zu Folgen.

1. Zus. Durch einen gegebenen Punct G mit einer gegebenen Linie CD eine gleichlaufende zu ziehen, ziehe man GH nach Gefallen, und mache HGA = GHD.

2. Zus. Es ist gewiß, daß man durch G Linien ziehen kann, die mit CD zusammenstossen, wenn man nur zu G einen Punct in CD nimmt. Man kann sich also vorstellen, daß AB um G als einen Mittelpunct, Kreisförmig nach GH zu gedrehet,

endlich in Lagen kömmt, in denen sie CD schneidet. Ich behaupte, der erste Durchschnitt mit CD werde sich nicht angeben lassen. Gesetzt, er sey K, daß HK eine bestimmte Linie ist, so nehme man HI > HK und ziehe GI; welches also eine Lage seyn wird, in der CD von der herumgedreheten AB geschnitten wird, ehe sie noch in die Lage GK kömmt; oder I wird ein Durchschnittspunct seyn, der vor K vorhergehet.

3. Zus. Der erste Durchschnittspunct der herumgedreheten AB mit CD, liegt weiter von H als jede Weite beträgt, die sich bestimmen läßt, d. i. als jede endliche Weite. Man kann also sagen, er liege **unendlich weit** von H. Mit dieser Entfernung des ersten Durchschnittpunctes, läßt sich also HG als eine bestimmte und endliche Linie nicht dergestalt vergleichen, daß man angeben könnte, wievielmahl HG müßte genommen werden, um die Weite von H bis an den ersten Durchschnittspunct, oder eine nächst grössere Weite zu bekommen.

4. Zus. AB und CD stossen nicht zusammen; GH mag klein oder groß seyn, oder sie mögen nahe oder weit von einander seyn. Es kömmt hier nicht auf ihre Entfernung, sondern auf ihre Lage an, die durch den Winkel, den jede mit EF macht, bestimmt wird, und also bey beyden einerley ist.

5. Zus. Wenn aber GP 47. F. ohne Ende verlängert, nicht mit CD zusammen stößt, so muß solches von beyder Linien Abstande HG, nicht von

ihrer Lage gegeneinander herrühren. Man schiebe AB, mit dem unveränderlich daran bleibenden Winkel BGP längst EH so hinunter, daß sich der Winkel EGB nicht ändert, daß AB nach und nach in solche Lagen kömmt wie ab eine vorstellt, so muß GP, so kurz man sie auch annähme, gewiß in Lagen wie gp kommen, in denen sie CD schneidet. Denn die Linie AB kann ganz herunter rücken, bis sie auf CD und G in H fällt, da denn GP nothwendig unter HD, in Hh fallen, und also zuvor ganz durch HD durchgeschoben seyn muß. Wie nun auf diese Art erhellt, daß Linien, die gegen EF eben die Lage haben, die GP hat, CD gewiß schneiden, so erhellt auch, daß man nicht annehmen kann GP komme durch das erwähnte Herunterziehen mit AB, in eine Lage, in der sie CD schneidet, ohne zugleich anzunehmen, sie habe CD schon zuvor geschnitten, ehe sie in diese Lage gekommen ist. Denn so bald GP in einer solchen Lage, z. E. in gp ist, so geht sie, nach q verlängert, unter CD durch, und die Puncte zwischen q und p müssen also vor p, durch CD gegangen seyn. Also läßt sich hier kein erster Punct des Durchschiebens angeben, wie bey dem 2. Zus. kein erster Punct des Durchschnittes, doch mit dem Unterschiede, daß hier nicht wie dort der Schluß gilt, dieser erste Punct lasse sich deßwegen nicht angeben, weil er weiter als alle Puncte, die sich angeben lassen, von H entfernt liege. Denn man begreift, daß dieser Schluß wegfiele, wenn man nur annähme GP in der ersten Lage schnitte schon

CD, in einer bestimmten Entfernung von H, da denn dieser Durchschnitt der erwähnte erste seyn würde, dergleichen sich aber im 2. Zus. nicht annehmen läßt.

6. Zus. Es gibt also ohne Zweifel Dreyecke, deren beyde Winkel an der längst HG fallenden Grundlinie, GHD, und HGP sind. Eines von ihnen ist Hgp: Stossen nun GP und CD ohne Ende verlängert nie zusammen, so gibt es kein solches Dreyeck, das HG oder eine grössere Länge zur Grundlinie hat. Man sieht aber nicht, wie blos diese längere Grundlinie die Dreyecke unmöglich machen soll; Man wird vielmehr nach dem, was man bey den möglichen Dreyecken dieser Art wahrgenommen hat, urtheilen; daß bey einer längern Grundlinie nur die Seiten bis zum Zusammenstossen weiter müssen fortgezogen werden. Diese Betrachtungen werden uns berechtigen, folgendes anzunehmen:

12. Satz. 9. Grundsatz.

Wenn zwo gerade Linien GP; CD, von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die innern entgegengesetzten Winkel $HGP + GHD < 2R$ so stossen sie verlängert nach der Seite von EF wo diese Winkel liegen, zusammen.

Was nehmlich von diesen Winkeln angenommen wird, ist so viel als nähme man an $EGP > GHD$ oder daß GP zwischen die gleichlaufenden AB, CD, (11. S.) hineinfällt.

1. Zus.

1. Zus. Durch einen Punct G, geht mit einer CD, nur eine AB gleichlaufend. Und wenn eine Linie GP eine von zwo Parallelen AB schneidet, so schneidet sie auch die andere CD.

2. Zus. Jede Linie EF schneidet zwo gleichlaufende Linien, so daß es mit den Winkeln die im 11. S. erwähnte Beschaffenheit hat. Denn eine der gleichlaufenden sey CD; sie hat durch G nur eine gleichlaufende 1. Zus. und dieses ist AB so nach dem 11. S. gezogen worden.

Fänden die Bedingungen des 11. S. bey den Winkeln einer andern Linie MN die AB und CD in O; S; schneidet nicht statt, wäre zum Ex. $MOB < MSD$, so wäre $AOS < 2R - CSO$ (8. S. 4. Z.) also $AOS + CSO < 2R$ und BA, DC, müßten vermöge des 12. S. nach der Seite A, C, zusammenstossen.

3. Zus. Parallelen AB, CD, zwischen Parallelen AC, BD, (48. F.) sind gleich. Denn man ziehe AD, so ist $DAB = ADC$; $ADB = DAC$ (2. Zus.) folglich $\triangle ADB = \triangle ADC$ (3. S.).

4. Zus. Wenn $AB = CD$ und $AC = BD$, so ist AB mit CD, und AC mit DB vermöge des 11. S. gleichlaufend; weil $\triangle ABD = \triangle ACD$ (4. S.) und also die Wechselswinkel an AD gleich sind.

5. Zus. RS, TV, 49. F. seyen Parallelen. Man lasse von der obern zween willkührlichen Puncten M, O, auf die untere Perpendikel MN, OP fallen,

daß also bey N, P, rechte Winkel sind, so sind auch rechte Winkel bey M, O, (2. Zus.) und die Perpendikel gleichlaufend (11. S.) also gleich (3. Zus.).

6. Zus. Ein Parallelogram (4. Z.) wird durch die Diagonale AD in zwey gleiche Dreyecke getheilet. Seine gegenüberstehende Winkel C, B, sind gleich, und die an einer Seite liegenden DCA + CAB = 2R.

7. Zus. Ein Parallelogramm, in dem ein rechter Winkel ist, hat lauter rechte Winkel.

8. Zus. Aus den beyden verschiedenen Seiten AC, CD, eines Parallelogramms, und dem Winkel, den sie einschliessen, C, solches zu zeichnen; zeichne man erst das Dreyeck ACD, das diese beyden Seiten mit dem Winkel geben, und beschreibe über AD, eben das Dreyeck ABD, nur so daß AB = CD, DB = AC; (6. Zus.).

9. Zus. Wenn die beyden Seiten von verschiedener Grösse sind, und der Winkel schief ist, so kömmt auf diese Art die länglichte Raute (16. Erkl.) heraus; die Raute aber, wenn die Seiten gleich sind; das Rechteck, wenn ungleiche Seiten AC, CD, in einem rechten Winkel C zusammengesetzt werden (7. Zus.) und das Quadrat, wenn hier die Seiten gleich sind. Der 3. und 5. Zus. geben noch andere Arten, diese Figuren zu verzeichnen, deren Möglichkeit also aus gegenwärtigen 12. S. dargethan ist, und die allein Parallelogramme sind.

10. Zus.

10. Zus. Im Parallelogramm PQRS 50. F. sey die Diagonale PR, und durch dieser willkührlichen Punct Y; TV mit PQ, WX mit RQ parallel gezogen; So entstehen vier Parallelogramme, da die beyden, durch welche die Diagonale nicht gehet, gleich sind. Denn △ PSR = △ PRQ (6. Zus.) und weil TYWP; XYVR, Parallelogramme sind, so ist △ TYP = △ PYW; △ XYR = △ RYV; also △ PSR − △ TYP − △ XYR = △ PRQ − △ PYW − △ RYV d. i. SXYT = YVQW.

11. Zus. Wenn SP = SR also SQ eine Raute, (16. Erkl.) so ist SPR = SRP (2. S. 3. Zus.) = TYP weil TY, SR parallel sind, also TP = TY (3. S. 2. Zus.) = PW (3. Zus) und TW eine Raute, deren Seite PW;

Eben so PRQ = QPR (2. S. 3. Z.) = VYR wegen der Parallelen VY, PQ, also VR = VY (3. S. 2. Z.) = WQ (3. Zus.) und XV eine Raute, deren Seite = WQ Der länglichten Raute YQ Seiten sind YW = TP und WQ.

Der länglichten Raute SY Seiten sind TY = TP (wegen der Raute TW) und ST = RV (3. Zus.) = WQ (wegen der Raute XV.).

Wird SPQ ein rechter Winkel so werden alle übrige Winkel bey der Raute SQ, auch rechte (7. Zus.) und es wird aus ihr ein Quadrat, dessen Seite PQ; aus zwey Stücken, PW, WQ, besteht die ganz willkührlich sind, weil man durch jedes

nach

nach Gefallen genommene W, nur W X ziehen kann. Da verwandeln sich also die beyden Rauten, in Quadrate der Seiten P W, W Q, und die beyden länglichten Rauten in Rechtecke deren jedes P W, W Q, zu Seiten hat. Einer Linie P Q, Quadrat S Q, besteht also, aus den beyden Quadraten ihrer beyden Stücken P W, W Q, und dem doppelten Rechtecke, eines Stücks P W mit dem andern W Q.

12. Zus. Man lasse in der 46 F. G K sich um G als einen Mittelpunct so drehen, daß der Winkel H G K sich immer weiter öfnet, und also G K in die Lage G I u. s. w. kömmt; diese Linie, die sich solchergestalt herumdrehet, schneidet H D in Puncten, K, I, die immer weiter und weiter von H liegen, oder der Durchschnittspunct der Linie H D die ihre Lage nicht ändert, und der andern G K die sich herumdrehet, rückt immer weiter und weiter von H in H D hinaus; und zugleich werden die Winkel K G B; I G B, immer kleiner und kleiner; d. i. die Lage der Linie, die sich herumdrehet, kömmt der Lage der Parallellinie G B immer näher und näher; diese Näherung kann ohne Ende fortgesetzt werden, bis beyde Linien zusammen fallen. Ehe dieses geschieht, muß der Durchschnittspunct in H D über alle Entferungen, die sich bestimmen lassen, hinausgerückt seyn. Denn bey jeder bestimmten Entfernung z. E. H I; gibt er eine Linie G I die von G B unterschieden ist. Zwischen den Lagen der sich herumdrehenden Linie, in der sie von G B unterschieden ist, und H D in bestimmten Entfernungen von H schneidet, und

zwischen

zwischen der Lage, da sie auf GB fällt, befinden sich mittlere, in denen ihre Durchschnittspuncte weiter von H sind, als sich bestimmen läßt; durch sie geschieht der Uebergang aus den ersten Lagen in die letzte; und man kann sie von der letzten nicht unterscheiden, weil jede Linie durch G, deren Lage sich von GB unterscheiden läßt, mit CD in einer bestimmten Weite von H zusammenstößt. (12 S.) Diese Durchschnittspuncte, die über alle bestimmten Entfernungen hinausliegen, nennt man unendlich entfernt, und sagt, die Parallelen GB, HD, schnitten einander in einer unendlichen Entfernung von H oder G; dieses heißt nichts weiter als: jede bestimmte Entfernung HI, gibt eine Linie GI, die mit HD nicht parallel ist; und man kann diese Entfernung so groß nehmen, daß die Lagen der Linien GB, GI um so einen kleinen Winkel man will, unterschieden sind.

13. Zus. Eben so nehme man in der 49 F. auf der Parallele MS ein Stück MO von bestimmter Länge und lasse das Loth OP herab. Um M lasse man sich eine Linie ML eben so drehen, daß der Winkel NML immer wächst, so rückt ihr Durchschnittspunct mit dem Lothe, Q, immer näher nach O, und ihre Weite QP wird von MN immer weniger und weniger unterschieden. Diese Näherung kann man so weit treiben als man will, und zugleich wird G der Durchschnittspunct der Linien ML, NV, immer weiter hinausrücken; wenn ML, wie im 12. Z. nicht mehr von MS zu unterscheiden ist, so wird QP von OP oder MN nicht mehr zu unterscheiden seyn.

14. Zus.

14. Zus. Nachdem ML in die Lage MS gekommen ist, lasse man sie sich immer so weiter fortdrehen, daß sie nun mit NM stumpfe Winkel macht, wie MH; so wird sie rückwärts verlängert NV wieder schneiden, aber in Puncten, die linker Hand von N liegen, wenn ihre vorigen Durchschnittspuncte G, rechter Hand lagen. Werden also die Linien NG als bejahend angesehen, so sind die NK verneinend und der Uebergang aus jenen in diese geschiehet hier durch das Unendliche, wenn sich die Linie MG auf die beschriebene Art drehet, daß die NG wachsen. Drehte sie sich auf die entgegengesetzte Art, daß die Winkel NMG, und die Linien NG abnähmen, so geschähe dieser Uebergang in N durch die Verschwindung oder einen Durchgang durch o. Der Uebergang durch das Unendliche, heisst eigentlich nur soviel, daß NG, NK, nach verschiedenen Seiten von N, jede ohne Ende wachsen, wenn man MG, MK, so dreht, daß die Winkel NMG, NMK, bis zu rechten wachsen.

13. Satz. Lehrs.

In jedem Dreyecke ABC 51 F. ist die Summe aller drey Winkel $A+B+BCA=2R$.

Bew. Man ziehe CE mit AB gleichlaufend (11. S. 1. Zus.) und verlängere BC nach D so ist $ACE=A$; $ECD=B$ (12. S. 2. Z.) also $BCA+B+A=BCA+ECD+ECA=2R$ (8 S.)

1. Zus.

1. Zus. $ACD + ACB = A + B + ACB$; also $ACD = A + B$.

2. Zus. Wenn $B = R$ so ist $BAC + ACB = R$; oder die beyden schiefen Winkel in einem rechtwinklichten Dreyecke betragen zusammen auch einen rechten.

3. Zus. Wenn im 2. Zus. noch $BA = BC$, so ist $BAC = BCA$ (2. S. 3. Z.) $= \frac{1}{2} R$.

4. Zus. In einem gleichseitigen Dreyecke ist jeder Winkel $= \frac{2}{3} R$ (2. S. 3. Z.)

5. Zus. Wenn in einem gleichschenklichten, ein Winkel gegeben ist, so sind sie alle gegeben. Es sey $BA = BC$, und B gegeben; so ist $A + ACB = 2R - B$ also $A = ACB = R - \frac{1}{2} B$. Oder wenn $A = ACB$ gegeben ist, so ist $B = 2R - 2A$.

Anm. Wie wir bisher die Winkel durch ihre Verhältniß zum rechten ausgedrückt haben, so kann man sie auf andere willkührliche Arten ausdrücken. Man stelle sich den rechten Winkel in 90 gleiche Theile getheilet vor; dieses ist ohne Zweifel möglich; ob wir gleich jetzo nicht wissen, wie wir diese Theilung bewerkstelligen sollen; denn man kann ein Ganzes in so viel Theile als man will eintheilen. Ein solcher Theil heisse ein Grad und $\frac{1}{60}$ von ihm eine Minute (minutia prima, *vel* minutum primum) $\frac{1}{60}$ der Minute und also $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}$ des Grades, eine Secunde (min. secund.) u. s. w. wenn kleinere Winkel vorkämen. So kann man die Winkel durch diese Theile, die man mit o, I, II, bezeichnet ausdrücken. So ist

$R = 90°$; $\frac{1}{2} R = 45°$; $\frac{2}{3} R = 60°$. Es sey im

5 Zus.

$B = 50°$

B = 50° 12′ 17″
179 59 60 = B + A + ACB

129° 47′ 43″ = A + ACB
64° 53′ 51″ ½ = A = ACB

6. Zus. Wenn man in jeder Figur 52 F. ABCDEF, die Summe aller Winkel zu finden verlangte; so ziehe man aus einem willkührlichen Puncte innerhalb der Figur N; nach allen Winkeln der Figur Linien. Dadurch bekömmt man so viel Dreyecke als die Figur Seiten hat. Von jedem Dreyecke liegen zweene Winckel an dessen Grundlinie, an einer Seite des Vielecks z. E. NAB, ABN. im △ ABN; und machen also Theile der Winkel des Vielecks aus, wie hier Theile von BAF, ABC; der dritte Winkel jedes Dreyecks liegt an seiner Spitze und gehört nicht zu den Winkeln des Vielecks, wie hier ANB. Nun machen in jedem Dreyecke alle drey Winkel zusammen 2 R, (13. S.) und in allen Dreyecken machen die Winkel ringsum die Spitzen N, zusammen, 4 R (8. S. 2. Z.) Es sey also die Zahl der Seiten = n; so ist die Summe der Winkel des Vielecks n. 2 R — 4 R = (n − 2). 2 R.

7. Zus. In einem ordentlichen Vielecke (18. Erkl.) ist der **Vieleckswinkel** (angulus polygoni) $\frac{n-2}{n}$ 2 R. Exempel sind das Dreyeck (4. Zus.) und das Viereck (12. S. 9. Z.)

Anm.

Anm. Dieser Zus. setzt zum voraus, daß die Winkel der Figur alle auswärtsgehende (*angles saillants*) sind, die nehmlich so beschaffen sind, daß sie gegen jeden Punct innerhalb der Figur wie N, weniger als 2 R betragen, oder daß, wenn man jedes Schenkel verlängert, die Verlängerung auserhalb des Umfangs der Figur geht. Winkel, deren Schenkel verlängert in die Figur hineingehen, wie ABC, EFG; 53 F. heissen einwärtsgehende (*rentrans*). Wenn man ihre Grösse, nach dem, was von ihnen der innern Seite der Figur zugekehret ist, schätzen will, so betragen sie über 2 R; und lassen sich nach der gegebenen allgemeinen Regel auch mit berechnen. Man kann aber von jeden Winkel wie ABC 53. F. das rechnen, was er weniger als 2 R beträgt; (angulum concauum) oder was er über 2 R beträgt und mit vorigen 4 R ausmacht: (angulum gibbum s. conuexum). Jenes kömmt am gewöhnlichsten vor: zuweilen aber auch dieses.

14. Satz. Lehrs.

Parallelogrammen BD, BF, zwischen einerley Parallelen AF, BC, und über einer Grundlinie sind gleichen Innhalts 54. F.

Bew. Wenn E in der verlängerten Linie AD liegt, so müssen BE, CD, einander irgendwo in G zwischen den Parallelen schneiden. Nun ist AB $=$ DC, BE $=$ CF, und AD $=$ BC $=$ EF (17. Erkl.) also AE $=$ DF: Folglich $\triangle$ ABE $=\triangle$ DCF (4. S.) und $\triangle$ ABE $-\triangle$ DEG $=\triangle$ DCF $-\triangle$ DEG d. i. ADGB $=$ EGCF, endlich ADGB $+\triangle$ BGC $=$ EGCF $+\triangle$ BGC; d. i. ADCB $=$ EBCF.

Fiele E zwischen A und D (55. F.) so wäre EF = BC = AD (17. Erkl.) also AE = DF, und EB = FC; DC = AB (17. Erkl.) also △ AEB = △ DCF (4. S.) und zu jedem EDCB addirt; ADCB = EFCB. Eben das gilt noch, wenn E in D fiele, da nur aus BEDC ein Dreyeck würde.

1. Zus. Zwey Parallelogramme, deren Grundlinien und Höhen gleich sind, sind auch gleichen Inhaltes. Die Höhe heißt nehmlich ein Perpendikel auf die Grundlinie von der gegenüberstehenden Seite; und so fallen die beyden Seiten, welche der gemeinschaftlichen Grundlinie gegenüber stehen, in eine Parallele (12. S. 5. Z.).

2. Zus. Dreyecke ACD, CDM, 56. F. sind gleichen Inhalts, wenn ihre Spitzen A, M, in einer Parallele AM, mit der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen. Denn Parallelen DB, DE, mit CA, CM, geben Parallelogramme ABDC = 2. △ ACD; MEDC = 2 △ CMD (12. S. 6. Z.) und diese Parallelogrammen sind gleich (14. S.) Eben das gilt auch vermöge des 1. Zus wenn der Dreyecke Höhen Aa; Mm; d. i Perpendikel von den Spitzen auf die Grundlinie gleich sind.

Umgekehrt, wenn die Dreyecke CAD, CMD, über einer Grundlinie gleichen Inhalt haben, so ist AM mit CD parallel. Denn wo solches nicht ist, so sind aAM, mMA, nicht rechte Winkel (11. S.) und doch weil aA, mM, parallel sind (11. S.) aAM + mMA = 2R (12. S.) also einer spitzig,

der

der andere stumpf. Nun sey a A M stumpf und man ziehe durch A eine Parallele mit C D (11. S. 1. Z.) die also auf a A senkrecht stehet, und folglich unter A M fällt, und C M zwischen C und M schneidet. Es geschehe in O; so haben die Dreyecke C O D, C A D einerley Inhalt, weil sie auf einer Grundlinie zwischen Parallelen A O, C D, stehen; folglich ist △ C O D = △ C O M welches ungereimt ist, weil jenes ein Theil von diesem ist. Es gibt also keine Parallele A O die von A M verschieden wäre, oder A M ist mit C D parallel.

3 Zus. Jedes Parallelogram C D B A ist noch einmahl so groß als jedes Dreyeck C A D das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

4. Zus. Ein Parallelogram zu machen, das einem gegebenen Dreyecke A B C (57. F.) gleich ist, halbire man des Dreyecks Grundlinie B C in E; und ziehe durch E, C, Parallelen, in was für einen Winkel mit B C man will, bis an A F G die durch A mit B C parallel gehet, so ist F G C E = 2 △ A E C (3. Zus.) und △ A E C = △ A B E = ½ △ A B C; also F G C E = △ A B C.

5. Zus. Wenn man mit dem Verfahren des 4. Zus. den 10. Zus. des 12. S. verbindet, so kann man ein Dreyeck A B C, 58. F. in ein gleich grosses Parallelogramm verwandeln, das einen gegebenen Winkel D, und eine gegebene Seite O hat. Man mache nähmlich im 4. Z. C E F = D, nehme C H = O und ziehe H I mit C G gleichlaufend; darnach

IC verlängert bis sie mit der verlängerten FE in K zusammen stößt und durch K eine Parallele mit BECH gezogen, der GC, IH, in M. L, begegnen, gibt das Parallelogramm MCHL=ECGF =△BAC, wo CH=O; M=D.

6. Zus. Man kann jede geradelinichte Figur 59. F. in ein Parallelogramm verwandeln, das eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel hat. Denn man kann die Figur durch Diagonalen in Dreyecke AED, ADC, CAß, zertheilen und dieses bey jedem einzelnen Dreyecke bewerkstelligen; alle die einzelnen Parallelogramme aber lassen sich mit den gleichen Seiten zusammen schieben, daß die ungleichen, wegen der gleichen Winkel alle in eine gerade Linie fallen, wie KECM; MCHL 58. Fig.

7. Zus. Jede Figur läßt sich in ein Rechteck verwandeln, dessen eine Seite gegeben ist.

15. Satz. Lehrsatz.

In einem rechtwinklichten Dreyecke BAC 60. F. ist der Hypothenuse BC, Quadrat BCMD so groß als die Summe von der Seiten AB, AC, Quadraten ABRN + ACEH.

Bew. Man ziehe aus dem rechten Winkel ein Perpendikel auf die Hypothenuse, welches ihr Quadrat in zwey Rechtecke BGFD, CGFM theilet. Jedes ist der Seite, nach welcher es zu liegt, ihrem Quadrate gleich.

Denn

Denn man ziehe AD, CR, so ist ΔBAD = ½ BGFD und ΔRBC = ½ RNAB (14. S. 3. Z.) aber RB = BA, BC = BD und RBC = Rect + ABC = ABC + Rect = ABD, also ΔRBC = ΔBAD (2. S.) also RNAB = BGFD.

Vollkommen eben so ΔCEB = ½ CEHA; ΔCMA = ½ CGFM; und CE = CA; CB = CM; ECB = ACM; also ΔCMA = ΔCEB und CGFM = CEHA.

Folglich ist die Summe der Rechtecke oder BCMD der Summe der Quadrate gleich; das ist BCq = ABq + ACq.

1. Zus. Umgekehrt, wenn 61. F. BCq = ABq + ACq so ist BAC = R; denn man ziehe auf CA, das Perpendikel AD = AB; so ist CDq = CAq + ADq = CAq + BAq = CBq also CD = CB und ΔCAD = ΔCAB (4. S.) und CAB = CAD = R.

2. Zus. Ein Quadrat zu machen, das der Summe zweyer Quadrate gleich ist, setze man ihre Seiten rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Hypothenuse, welche die Seite der Summe seyn wird. Will man aber eine Linie finden, deren Quadrat der Differenz zweyer Quadrate gleich ist, so richte man auf die Seite des kleinern CA, ein unbegränztes Perpendikel AB auf und durchschneide solches mit des grössern Seite CB so ist CBq — CAq = ABq.

16. Satz.

Wenn eine Linie AB 62. F. einen Kreis in zween Puncten A, B, schneidet, so ist jeder Punct von ihr wie D der zwischen A und B fällt näher bey dem Mittelpuncte C als der Halbmesser beträgt, und jeder Punct auser A und B, wie E, weiter davon.

Bew. CAB = CBA (2. S. 3. Z.) aber CDB > A (9. S.) also CD < CB (9. S. 6. Z.); Und CEB < CBA (9. S.) < A; also CA < CE;

Zus. Eine gerade Linie schneidet einen Kreis entweder in zween Puncten; oder sie berührt ihn in einem, oder sie trifft gar nicht an seinem Umfang an, und alle ihre Puncte sind auser ihm (8. Grundz. Zus.)

17. Satz.

I) Ein Perpendikel EF 63. F. aus eines Kreises Mittelpuncte E, auf die Sehne AB, halbirt sie in F; II) Eine Linie, die aus dem Mittelpunct E gezogen die Sehne halbirt, steht auf ihr senkrecht. III) Eine Linie, die durch das Mittel einer Sehne senkrecht auf sie gezogen wird, geht durch den Mittelpunct.

Bew. Weil EA = EB, so folgt I und II aus 9. S. 5. Z. und durch der Sehne AB Mittel F das nach I bestimmt worden, kann nur ein Perpendikel EF gehen (9. S. 4. Z.) also erhellet auch III.

1. Zus. Durch drey gegebene Puncte A, B, C, 64. F. einen Kreis zu beschreiben, ziehe man mitten

durch

durch die gegebenen Sehnen, AB, BC, die Perpendikel MN, PQ, (6. S.). Weil der Mittelpunct in jedem liegt, so liegt er in ihrem einzigen Durchschnitte O, und der Halbmesser ist OA = OB = OC. Daß aber MN, PQ, irgendwo zusammenstossen werden, wenn A, B, C, nicht in einer geraden Linie liegen, erhellet so: Ein Loth von V auf AB gefällt ist mit MN gleichlaufend (11. S.) Sind nun BC, AB, nicht eine gerade Linie, so steht QP nicht auf AB senkrecht, weil es sonsten zwo Linien durch B gäbe, die beyde auf PQ senkrecht stünden, BC, und die verlängerte AB, wieder 9. S. 4. Z. also ist PQ von dem Lothe aus V auf AB unterschieden, folglich mit MN nicht gleichlaufend (12. S. 1. Z.).

2. Zus. Dieser Satz vom Zusammenstossen der Perpendikel gilt, wenn auch T, V, nicht mitten in AB, BC, liegen, weil der Beweis solches nirgends annimmt, das heißt: zwey Perpendikel auf zwo Linien, die weder eine ausmachen, noch gleichlaufend sind, stossen allemahl zusammen.

3. Zus. Aber wenn A, B, C, in einer Linie lägen, so wären MN, PQ gleichlaufend. Nähmlich durch drey Puncte einer Linie geht kein Kreis (16. S. Zus.).

4. Zus. Drey Puncte bestimmen einen einzigen Kreis, wie zweene eine gerade Linie; doch wird der Kreis zugleich der Grösse nach bestimmt, die gerade Linie zuweilen nur der Lage nach. Die drey Puncte

geben zugleich den Mittelpunct und den Halbmesser; und also können zweene verschiedene Kreyse, einander nicht in mehr als zweene Puncten schneiden.

18. Satz. Lehrs.

I) Wenn die Sehnen NM, FG (65. F.) vom Mittelpuncte E gleich entfernt sind, so sind sie gleich: II) Wenn sie gleich sind, so sind sie gleich entfernt. III) Die entferntere ist kleiner IIII) die kleinere ist entfernter.

Bew. Die Entfernungen EH, EO, halbiren die Sehnen (17. S.); also ist $FH = \frac{1}{2} FG$; $MO = \frac{1}{2} MN$: Weil nun $EF = EM$, so ist

I) $FEq - EHq = EMq - EOq$ oder (15. S.) $FHq = MOq$ also $FH = MO$, $FG = MN$.

II) $FEq - FHq = EMq - MOq$ oder $EHq = EOq$;

III) Wenn $EO > EH$, so ist $EMq - EOq < EFq - EHq$ oder $MO < FH$;

IIII) Wenn $MO < FH$ so ist $MEq - MOq > EFq - FHq$ oder $EO > EH$.

19. Satz. Lehrsatz.

Ein Perpendikel FD, auf den Halbmesser BA durch sein Ende A hat alle seine übrigen Puncte auserhalb dem Kreise; Jede andere Linie durch A aber schneidet den Kreis in zween Puncten 66. F.

Bew.

Bew. Man nehme F nach Gefallen in AD, so ist BFA < BAF (9. S. 3. Z.) also BF > BA (9. S. 6. Z.) > BG (13. Erkl).

Weil AL schiefe Winkel mit BA macht (9. S. 4. Z.) und es doch auf sie aus B ein Perpendikel gibt (7 S.) so sey solches BE so ist BAE < BEA (9. S. 3. Z.) also BE < BA (9. S 6. Z.) < BI (13. Erkl.) also ist ein Punct von AL, nähmlich E innerhalb des Kreises und AL schneidet den Kreis noch einmahl, (8. Grundſ. Zuſ.) man nehme auf ihr EM = EA, so ist △ BEM = △ BEA (2. S.) also BM = BA; und M der zweyte Durchschnittspunct (13. Erkl.) auser dem und A es keinen gibt (16. S. Zuſ.) daß also das Stück AEM ganz innerhalb des Kreises fällt.

1. Zuſ. Ein Perpendikel durch des Halbmessers Ende ist eine Tangente (13. Erkl.) daß man also durch jeden Punct im Umfange des Kreises A eine Tangente zieht, wenn man dahin einen Halbmesser BA zieht und auf solchen durch A ein Perpendikel FD setzet.

2. Zuſ. Durch ein A, geht nur eine Tangente (20. S.) und steht jede Tangente auf den Halbmesser am Berührungspuncte senkrecht.

3. Zuſ. Ein Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunct, geht durch den Mittelpunct, (2. Zuſ. und 9. S. 4. Z.).

4. Zuſ. Sehnen, die man mit der Tangente FD gleichlaufend, also auf BA senkrecht zöge, würden

immer kleiner und kleiner werden, je näher sie von B nach A rückten (18. S.) das ist, ihre Durchschnitte mit dem Kreise würden immer näher und näher zusammen rücken und endlich in A in einen Punct zusammengehen. Also kann man die Tangente als die letzte dieser Sehnen, und den Berührungspunct, als zweene zusammengegangene Durchschnittspuncte ansehen. In so fern steht auch die Tangente unter dem 16. Satze, daß jede Linie, die nicht völlig auserhalb des Kreises fällt, zweene Puncte mit ihm gemein hat.

5 Zus. Wenn man aus einem gegebenen Puncte K 67. F. eine Tangente an den Kreis ziehen wollte, so liesse sich die Art solches zu bewerkstelligen folgendermaassen analytisch finden: die Tangente, die man sucht, sey KM; so ist BMK = R (2. Z.). Man ziehe an A die Tangente AD der BM verlängert in D begegne; so haben die Dreyecke ABD, MBK, den Winkel B gemein, BAD = BMK, und BA = BM; sind folglich gleich (3. S.) also BK = BD; Hieraus fließt folgende Auflösung: durch K und den Mittelpunct ziehe man KB; an A wo sie in den Kreis schneidet, eine Tangente, die man mit BD = KB durchschneide; So kann man DB ziehen, welche den Kreis in dem gesuchten Berührungspuncte M schneiden, und KM die Tangente seyn wird. Man kann auch Ad = AD nehmen, u d also eine zweyte Tangente Km ziehen.

6. Zus. Alle Puncte des Bogens AIM, 66 F. A und M ausgenommen, fallen zwischen AL und AD

(19. S. und 17. S.) man kann also sagen, der Winkel, den der Bogen MIA mit der Tangente macht, sey kleiner als jeder geradelinichte Winkel LAD; und der Winkel des Bogens MIA mit dem Halbmesser BA sey grösser als jeder geradelinichte spizige Winkel LAB; nähmlich LAB kann einem rechten so nahe kommen, und LAD so klein werden als man nur will, und der Bogen fällt doch allemahl ganz zwischen LA und AD.

20. Satz.

Kreise, die aus einem Mittelpuncte K 68. F mit verschiedenen Halbmessern KP; KQ, beschrieben sind, concentrische Kreise, haben keinen Punct mit einander gemein.

Bew. Denn jeder Punct des einen ist von K um die Länge KP; und jeder Punct des andern um die Länge KQ entfernt. Hätten sie einen Punct gemein, so wäre dieses ein Punct beyder Kreise, der nicht zugleich zwo verschiedene Entfernungen von einerley Puncte K haben kann.

1. Zus. Kreise, die einander schneiden, das ist, zweene Puncte, und nicht mehr (17. S. 4. Z.) gemein haben, haben nicht einerley Mittelpunct; aber eine gemeinschaftliche Sehne durch die Durchschnittspuncte; wie LM, 27 F. und wenn man durch das Mittel dieser Sehne ein Perpendikel auf sie selzt, geht solches durch beyder Kreise Mittelpuncte (17 S.) die Mittelpuncte können aber auf verschiedenen Seiten

ten der Sehne liegen wie 27 F. oder auf einer wie 69 F. Im letzten Falle sey LH des Kreises um A, und Ll des Kreises um P, Tangente; die letztere muß wegen des stumpfen Winkels HLP, und des spitzigen PLO, zwischen LH und LM fallen; (19 S.) und ihres Kreises Bogen LNM fällt also bey L zwischen sie und LM folglich zwischen LM und den Bogen LKM des andern Kreises, weil LKM zwischen LH und Ll fällt (19 S.). Eben so erhellet, daß bey M der Bogen MNL zwischen LM und den Bogen MKN fallen muß. Und also liegt (vermöge 17. S. 4. Z.) der ganze Bogen LNM zwischen LM und dem Bogen LKM, aber wenn Ak = AL; Pn = PL der ganze Bogen LkM zwischen LM und dem Bogen LnM; Nun ist PL > AL (9. S. 12. Z.) von den Bogen also, die auf der Seite der gemeinschaftlichen Sehne liegen, auf der die Mittelpuncte nicht liegen, erhebt sich des größten Kreises Bogen am wenigsten über die Sehne, oder er ist flächer.

2. Zus. Aus jedem Puncte P des Perpendikels KOn läßt sich ein Kreis durch L und M beschreiben; weil allemahl PL = PM (2. S.). Und auser den Puncten L, M, kann noch nach Gefallen einer N in den Perpendikel gegeben seyn; weil dieses schon durch die Mittelpuncte aller Kreise durch L und M, gehet, und also der Punct N nur die Lage des Mittelpunctes im Perpendikel nach (17 S. 1. Z.) bestimmt. Da man also N so nahe man will bey LM nehmen kann, so lassen sich Kreise beschreiben,

deren

deren Bogen LNM sich immer weniger und weniger über LM erheben, immer flächer und flächer werden; oder der Sehne immer näher und näher kommen. Weil dieses ohne Ende fortgehet, und immer grössere Halbmesser erfodert (1. Zus.) so kann man sagen, der letzte unter ihnen, für einen unendlichen Halbmesser, der nehmlich grösser ist als jede gegebene Länge, sey die Sehne LM selbst. Und so läßt sich jede bestimmte gerade Linie, als ein Bogen eines Kreises betrachten, dessen Halbmesser unendlich wäre.

3. Zus. Um den Mittelpunct F, 70. Fig. sey mit FG ein Kreis beschrieben dessen Durchmesser GP ist. Man nehme einen Punct Q auserhalb der Linie GF und beschreibe darum einen Kreis mit QG; dieser wird den vorigen noch anderswo als in G schneiden. Denn man lege ein Dreyeck FQg das Qg = QG; Fg = FG hat unter FQ, welches offenbahr wie im 4. S. angeht. So ist g in einem Kreise um Q mit QG, und in einem um F mit FG; also beyder genannten Kreise zweyter Durchschnitt. Sollen also ein Paar Kreise nur einen Punct G mit einander gemein haben, einander nicht schneiden, sondern nur berühren, so müssen ihre Mittelpuncte F, f, mit G in einer geraden Linie liegen.

4. Zus. Wenn man durch einen gegebenen Punct G, zweene Kreise beschreiben soll die nur ihn gemein haben, so nehme man F, f, für ihre Mittelpuncte wie man will an, nur daß durch alle drey Puncte

eine

eine gerade Linie geht, Kreise um F, f, mit FG, fG, werden das verlangte thun.

Denn ein Perpendikel MN durch G auf die gerade Linie durch F, f, G, berührt beyde Kreise (19. S. 3. Z.) Liegen nun F, f, auf verschiedenen Seiten von G, oder von MN 71. F. so haben die Kreise keinen Punct als G gemein weil jeder ganz auf seiner Seite der Tangente liegt. Befinden sich aber F, f, auf einer Seite von G 70. F. so sey Gf > GF; und K im Kreise um f, man ziehe fK, FK, KG, so ist fKG = fGK (2. S. 3. Zus.) und weil F zwischen f und G fällt, FKG < fKG also < fGK also fK > fG (9. S. 6. Z.) oder von dem Kreise um f ist jeder andere Punct als G, auser den um F.

5. Zus. Kreise die einander berühren, haben an einer gemeinschaftlichen Tangente einen gemeinschaftlichen Berührungspunct, und Kreise die dergleichen haben berühren einander, weil ihre Mittelpuncte in dem Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunct liegen (19. S. 3. Z.) Zweene Kreise, die durch einen Punct gehen, aber daselbst nicht einerley Tangente haben, schneiden einander auser diesem Puncte noch anderswo aus dem 3. Zus. denn jedes Mittelpunct liegt in einem Perpendikel auf seine Tangente durch den gemeinschaftlichen Punct, und diese Perpendikel müssen verschieden seyn, also können nicht beyde Mittelpuncte mit dem gemeinschaftlichen Puncte in einer geraden Linie liegen.

6. Zus.

6. Zus. Wenn ein Kreis um F, 70. F. GM zur Tangente hat, und man in der verlängerten GF, f weiter als F von G nimmt, so geht der Kreis mit fG, zwischen vorigen und der gemeinschaftlichen Tangente hin (4. Zus.) der Winkel eines Kreises mit seiner Tangente, (19. S. 6. Z.) wird also kleiner, wenn der Halbmesser grösser wird. Dieser **Berührungswinkel** der kleiner als jeder geradelinichte ist, kann also nicht völlig Nichts seyn, wie Peletarius glaubte, sonst wäre unbegreiflich, wie er bey dem Kreise um f, kleiner seyn könnte als bey dem um F. S. Clauii Eucl. L. III. schol. prop. 16. Wallisium de angulo contactus, Op. T. II. p. 605.

7. Zus. Der grössere Kreis entfernt sich also langsamer von seiner Tangente, als der kleinere, daher kann man sagen er habe weniger Krümmung womit auch der 1. Zus. übereinstimmt.

8. Zus. Man schiebe in der 69. F. des kleinern Kreises Mittelpunct A, auf dem Perpendikel Nn, nach P zu, so werden seine beyden Durchschnitte mit dem grössern L, M, immer näher und näher zusammen rücken, und endlich in N in einen Punct fallen, in welchen nun beyde Kreyse einander berühren. Der Berührungspunct zweener Kreise ist also als die Vereinigung zweener Durchschnittspuncte anzusehen und so ist der Satz: Zweene Kreise berühren einander nur in einem Puncte, ein besonderer Fall dessen: Sie schneiden einander nur in zween Puncten. Eben wie 19. S. 4. Z.

21. Satz.

21. Satz. Lehrs.

Der Winkel am Mittelpuncte eines Kreises BDC 72. 73. 74. F. ist noch einmahl so groß als der Winkel am Umfange B A C.

Bew. I. Fall 72. F. BDC = A + C (13. S. 1. Z. = 2 A (2. S. 3. Z.).

II. 74. F. EDC = 2. EAC; EDB = 2. EAB also CDE + EDB = 2. (EAC + FAB) oder CDB = 2. CAB.

III. 73. F. EDC = 2. EAC; EDB = 2. EAB; also EDC – EDB = 2. (EAC – EAB) oder BDC = 2. EAB.

1. Zus. Der Winkel im halben Kreise KPL 75. F. ist ein rechter. Denn man ziehe PFG so ist PGL = $\frac{1}{2}$ GFL und GPK = $\frac{1}{2}$ GFK; also GPL + GPK = $\frac{1}{2}$. (GFL + GFK (= $\frac{1}{2}$. 2 R (8. S.).

2. Zus. Der Winkel MPL im kleinern Abschnitte, ist stumpf, und NPL im grossen spitzig. Man ziehe durch L den Halbmesser LK, so ist KPL = R also MPL > R; NPL < R.

3. Zus. Winkel an verschiedenen Puncten eines Abschnittes sind gleich. Denn sie gehören zu einerley Winkel am Mittelpuncte.

22. Satz. Lehrs.

I. Wenn in einem Kreise 65. F. die Winkel am Mittelpuncte N E M = F E G so sind die Bogen N L M, F I G zwischen ihren Schenkeln gleich, und umge-

umgekehrt, II) wenn die Bogen gleich sind, sind auch die Winkel gleich.

Bew. I. Die Gleichheit der Winkel gibt NM = FG (2. S.). Man lege also die Sehne NM mit ihrem Bogen NLM so auf die Sehne FG, daß N auf F; M auf G fällt; so muß jeder Punct des Bogens NLM auf einen Punct des Bogens FIG fallen; weil beyder Bogen Puncte von E gleich weit abstehen: Also decken beyde Bogen einander.

II. Sind aber die Bogen NLM = GIF; und ihre Sehnen nicht gleich, so ziehe man aus N die Sehne NQ = GF (indem man aus N mit dem Halbmesser = GF einen Kreis beschreibet, der den vorgegebenen nothwendig schneidet). Nun mag der Bogen NLQ grösser oder kleiner als NLM seyn, so finden allemahl folgende Schlüsse statt: Man kann NQ vermöge I auf GF legen, daß beyde Sehnen, und die Bogen NLQ, GIF einander decken; und weil QM mit NLQ zu einem Kreise gehöret, so müssen alle Puncte von QM auf Puncte des Bogens, den NLM deckt, oder auf die Verlängerung dieses Bogens von F nach V zu fallen (17. S. 5. Z.) nachdem nähmlich NLQ grösser, oder kleiner als NQM wäre. Folglich deckt entweder der ganze Bogen NLM einen Theil von GIF, oder einen Theil von NLM den ganzen GIF welches beydes der angenommenen Gleichheit wiederspricht. Also kann Q von M nicht unterschieden seyn, und es ist NM = GF folglich NEM = GEF (4. S.).

1. Zus. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Bogen; und gleiche Bogen gleiche Sehnen. Dieses gibt, wenn NM = FG; so wohl, NLM = GIF als derselben Ergänzungen zu einerley Umfange. NIM = FLG, alles dieses gilt auch bey zween Kreisen, deren Halbmesser gleich sind;

2. Zus. Das Perpendikel EF, 63. F. 17. S. halbirt auch den Bogen AIB in I;

3. Zus. Wenn die beyden Winkel FKD; GKD; fig 76. eine Rationalverhältniß haben, so drucke man solche (Ar. V. 24.) durch die Verhältniß der zwo ganzen Zahlen p : q aus. Es muß also einen kleinen Winkel wie EKD geben, der p mahl in dem einen, q mahl in dem andern enthalten ist. Zwischen des Winkels EKD Schenkel fällt der Bogen DE, und dieser muß auch p mahl in DF; q mahl in DG enthalten seyn; Folglich ist DF : DG oder p. DE : q. DE = p q = FKD : GKD; oder die Bogen welche zwischen der Winkel Schenkel fallen; ihnen zugehören, verhalten sich wie die Winkel.

Umgekehrt, wenn die Bogen DF : DG in der Rationalverhältniß p : q sind; so muß ein kleiner Bogen DE; p mahl in dem einen, q mahl im andern enthalten seyn. Diesem kleinen Bogen gehört der Winkel EKD zu, und so viel Bogen = DE auf DF oder DG gehen, so viel Winkel = EKD gehen auf den Winkel FKD oder GKD; also ist FKD : GKD oder p. EKD : q. EKD = p : q oder die Winkel verhalten sich wie die ihnen zugehörigen Bogen.

Wenn

Wenn also die Winkel, oder die Bogen eine Rationalverhältniß haben, so verhalten sich allemahl die Winkel wie die Bogen.

4. Zus. Es sey LKD = R = LKH; so sind die Bogen LD = LH (22. S.) also jeder die Hälfte des halben Umkreises DGH oder ein Viertheil des ganzen DGHID; daher man diese Bogen Quadranten nennt. Es verhält sich wieder der Quadrant zum Umkreise wie der rechte Winkel zur Summe aller rings um den Punct K (8. S. 2. Z.) und eben so ist FKD : 4R = DF : DFGHID.

5. Zus. Wird der Quadrant DL in 90. Theile getheilet, von denen einer DE seyn mag; daß also der ganze Umfang 360. solcher Theile bekömmt; so kann man die Winkel, die sich durch EKD messen lassen, durch die Bogen, die zwischen ihre Schenkel fallen, bestimmen. Wenn z. E. DF solcher Theile 50 hielte, so bestünde FKD aus 50. solchen Winkeln, dergleichen 90 einen rechten ausmachen, und 360. den Raum um K ringsherum ausfüllen. Es ist also gleichviel, ob man den Winkel EKD nach 13. S. Anm. einen Grad nennen will, oder ob man ED = $\frac{1}{360}$. DGHID einen Grad heißt, da alsdenn EKD ein Winkel ist, der dem Bogen von einem Grade zugehöret. Die Benennung der Grade wird nähmlich eigentlich den Theilen des Kreises beygelegt. Man kann sie aber auch auf diese Art von Winkeln gebrauchen. FKD = 50° heißt so viel als FKD = 50. EKD wenn ED = 1°.

6. Zus. Alle diese Schlüsse setzen keine gewisse Grösse des Halbmessers KD zum voraus; wird also um K ein anderer Kreis beschrieben, so ist auf eben die Art df : dghid = fKd : 4R; aber fKd = FKD; also ist df : dghid = DF : DGHID oder Bogen, die mit verschiedenen Halbmessern aus der Spitze eines Winkels beschrieben sind, haben einerley Verhältniß zu ihren Umkreisen, oder sie sind ähnlich (nähmlich ähnliche Theile ihrer Umkreise) theilet man also jeden Umkreis in 360° ein, die freylich bey den kleinern kleiner werden; so bekömmt DF soviel Grade als df; und die Grösse des Winkels FKD wird durch einerley Anzahl von Graden ausgedruckt, man mag die zählen, welche auf DF, oder die, welche auf df gehen. Ja wenn man gKd durch Grade des Bogens gd, und FKD durch Grade des Bogens FD ausdruckte, so würden die Mengen beyder Grade sich eben so verhalten, als ob man auch für GKD die Grade in GD oder auch für FKD die Grade in fd gezählet hätte, weil GD so viel Grade hat als gd, und fd so viel als FD:

7. Zus. Auf diesen Betrachtungen beruhet die gewöhnliche Art Winkel zu messen. Man legt an ihre Spitze einen Kreis, der in Grade getheilet ist, und zählet, wieviel zwischen die Schenkel fallen. Der Halbmesser ist willkührlich (6. Z.). Und so heißt ein Bogen wie FD, das **Maaß** des Winkels FKD, weil der Bogen, oder eigentlich, die Menge von Graden die auf ihn gehen, sich verhält, wie die Menge von

Wins

Winkeln EKD die auf FKD gehen, d. i. wie der Winkel FKD. Dieses ist also ein Fall, da das Maaß einer Sache nicht mit ihr von einerley Art ist, und nicht in ihr enthalten seyn kann; aber ihr proportionirt ist: Eben so pflegt man Wege durch Zeit zu messen, und in andern Fällen zu verfahren.

8. Zus. Das Maaß eines Winkels am Umkreise NPL; MPL; 75. E. (22 S.) ist die Hälfte des Bogens NL; ML auf dem er stehet. Und wenn zweene Winkel wie MPL und O auf Bogen stehen, die zusammen den Umkreis ausmachen, so machen ihre Maasse zusammen den halben Umkreis, also ist P + O = 2 R.

9. Zus. Jedes in einem Kreise beschriebene Viereck PMOL hat die Eigenschaft, daß seine gegenüberstehende Winkel MPL + LOM = PLO + OMP = 2 R.

10. Zus. Läßt sich ein Winkel nicht durch Grade messen, so kann man Minuten, Secunden u. s. f. (13. S. Anm.) dazu nehmen.

11. Zus. Vom 3. Zus. an bis hieher wurden Rationalverhältnisse zum vorausgesetzt. Also ist noch nöthig zu zeigen was wahr bleibt, wenn die Bogen GD : FD und folglich die Winkel (3. Zus.) oder die Winkel GKD, FKD; und folglich die Bogen eine Irrationalverhältniß hätten.

Man nehme an die Bogen GD : FD haben eine Irrationalverhältniß: So lassen sich beyde nicht mit einerley kleinem Bogen ausmessen. Aber für einen von beyden z. E. FD kann man gar leicht ei-

nen kleinen Bogen der ihn misst, durch fortgesetzte Halbirungen finden (2. Zus.). Es sey z. E. FD = 32. ED wo 32 = 2.2.2.2.2, oder wo man in FD fünfmahl halbirt hat, auf ED zu kommen. So wird FD genau von ED gemessen, aber GD nicht. Es sey z. E. GD > 50. ED aber < 51. ED. Nun halbire man ED und heisse die Hälfte f; also ED = 2f so ist FD = 64. f aber GD wird nicht nur zwischen 50. 2. f und 51. 2. f oder zwischen 100f und 102 f fallen, sondern es muß nothwendig entweder zwischen 100f und 101 f oder zwischen 101 f und 102 f fallen. Wie es also vorhin zwischen Gränzen eingeschränkt wurde die um ED unterschieden waren, so ist es nun zwischen Gränzen eingeschränkt, die nur um f = $\frac{1}{2}$ ED unterschieden sind. Nimmt man ferner g = $\frac{1}{2}$ f = $\frac{1}{4}$ ED so ist FD = 128 g. Gesetzt GD sey vorhin zwischen 101 f und 102 f gefallen, so fällt es jetzo nicht nur zwischen 202 g und 204 g sondern entweder zwischen 202 g und 203 g oder zwischen 203 g und 204 g und ist also zwischen Gränzen eingeschränkt die nur um g = $\frac{1}{4}$ ED unterschieden sind. So kann man es durch die Halbirung von g, in Gränzen einschränken die nur um $\frac{1}{8}$ ED unterschieden sind; oder so immer zwischen engere und engere Gränzen, deren Unterschied kleiner als jede gegebene Grösse werden kann, fallen. Die Verhältniß DF : DG läßt sich also auch immer mit einer kleinern und kleinern Ungewißheit ausdrücken. Sie wäre z. E. hier I) 32 : 51 oder 52; II) 64 : 101 oder 102; III) 128 : 202 oder 203 u. s. w.

So

So lassen sich also Rationalverhältnisse angeben die der Irrationalverhältniß DF : DG so nahe als man will kommen.

Wenn man EKD, FKD, GKD, in den bisherigen Schlüssen statt ED, FD, GD, setzt, so wird man vollkommen auf eben die Art einsehen, daß sich Rationalverhältnisse finden lassen, die der Irrationalverhältniß FKD : GKD so nahe als man will kommen.

Schon hieraus läßt sich schliessen, daß die Irrationalverhältnisse FKD : GKD und FD : GD gleich seyn müssen. Denn man nähert sich beyden durch immer gleiche Rationalverhältnisse, und man kann diese Näherung so weit treiben als man will. Man kann also jede als die letzte von allen den Rationalverhältnissen ansehen, durch die man sich ihr nähert, und wenn alle die Rationalverhältnisse gleich sind werden die letzten auch gleich seyn.

Diese Schlüsse kurz und überzeugend zu übersehen, kann man sie so vortragen: Man nenne die

Winkel $GKD = \alpha$; $FKD = \varepsilon$; $EKD = \varkappa$
Bogen $GD = a$, $FD = e$; $ED = k$

Ferner setze man $e = nk$ also $\varepsilon = n\varkappa$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, die so groß als man will, folglich $\frac{1}{n}$ so klein als man will werden kann.

Nun bedeute m eine andere ganze Zahl, so ist wegen der Irrationalverhältniß nicht $a = mk$, sondern grösser oder kleiner; Ferner wird aus dem vorigen erhellen, daß man annehmen kann $a \gtrless mk$

und $a \lessgtr (m+1)k$; daraus folgt denn $\alpha \gtrless m\varkappa$ und $a \lessgtr (m+1)\varkappa$ Also ist $\frac{a}{e} \gtrless \frac{m}{n}$ und $\lessgtr \frac{m+1}{n}$; Eben so $\frac{\alpha}{\varepsilon} \gtrless \frac{m}{n}$ und $\lessgtr \frac{m+1}{n}$ Sind also $a : e$ und $\alpha : \varepsilon$ nicht gleich, so sey z. E. die erste grösser. Man setze also $\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$ und $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + y$ so ist $x \gtrless y$, jedes aber $\lessgtr \frac{1}{n}$. Ferner $\frac{a}{e} - \frac{\alpha}{\varepsilon} = x - y$. Sollen nun beyde Verhältnisse, $a : e$; $\alpha : \varepsilon$, nicht gleich seyn, so können auch die beyden Quotienten $\frac{a}{e}$; $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ nicht gleich seyn, sondern ihr Unterschied $x - y$ muß eine gewisse bestimmte Grösse haben. Er ist aber gewiß kleiner als $\frac{1}{n}$; und $\frac{1}{n}$ kann so klein werden als man will, so daß sich keine Grösse angeben läßt bis auf die, und nicht weiter $\frac{1}{n}$ abnehmen könnte. Also kann $x - y$ so klein werden als man will, und folglich keine bestimmte Grösse haben. Folglich können die Quotienten, und die Verhältnisse, keinen Unterschied haben, der sich angeben liesse. Grössen aber, zwischen denen man keinen Unterschied angeben kann, können nicht anders als für gleich angesehen werden. Die Verhältnisse der Winkel und der Bogen müssen also gleich seyn. Und daher verhalten sich die Winkel wie die Bogen, die Verhältniß mag rational oder irrational seyn.

12. Zus. Wenn n ohne Ende wächst, so nimmt k ohne Ende ab und es gibt bey keinem von beyden ein Letztes, weil diese Veränderung ohne Ende fortgeht. Wenn man sich aber ein letztes k einbildet, so muß man solches kleiner als jede Grösse die sich angeben läßt, unendlich klein annehmen. Man heißt es das Element der Bogen e; a; und das ihm zugehörige $\varkappa$ das Element der Winkel ε; α; und sieht diese Elemente an als würden von ihnen die Bogen und Winkel völlig genau gemessen; weil der Fehler nicht ganz ein Element betragen kann. Diese Redensarten sind also blos Abkürzungen des bisherigen weitläuftigen Vortrags.

23. Satz. Aufgabe.

Ein Kreis 77. F. sey in lauter gleiche Bogen AB = BC u. s. f. an der Zahl n getheilet, man verlangt die Winkel E, D, C, u. s. f. zu wissen, welche die Sehnen mit einander machen.

Aufl. Weil die Bogen $EF = ED = \frac{1}{n} \cdot 360°$; so steht der Winkel E auf dem Bogen FABCD auf, der in Graden $= 360 - \frac{2 \cdot 360}{n}$ ist; Also ist der Winkel $E = 180° - \frac{360°}{n}$ (22. S. 8. Z.). Da nun auch die Bogen $EF = FA$ und $ED = DC$ u. s. f. so sind der Sehnen Winkel an der Peripherie alle gleich, und also = E.

1. Zus. Die Sehnen selbst aber sind auch gleich, (22. S. 1. Z.) wenn man also eines Kreises Umfang in n gleiche Theile theilen kann, so kann man dadurch in ihm ein ordentliches Vieleck von n Seiten oder Winkeln beschreiben (18. 20. Erkl.). Dessen Polygonwinkel hier eben so wie 13. S. 7. Z. gefunden wird.

2. Zus. Die Halbmesser theilen das reguläre Polygon, das in den Kreis beschrieben ist, in lauter gleiche Dreyecke, AKB, BKC, CKD, u. s. f. (4. S.).

3. Zus. Der Winkel am Mittelpuncte, angulus centri; AKB = BKC, ist = $\frac{1}{n}$. 360°.

Anm. Eine Tafel für die Polygon- und Centriwinkel, läßt sich also leicht verfertigen, wenn man nach und nach n = 3; = 4; = 5, u. s. f. setzt. Sie hat in der ausübenden Geometrie und in der Befestigungskunst vielen Nutzen.

4. Zus. Wenn ABCDEF ein ordentliches Vieleck ist, so läßt sich ein Kreis durch alle Spitzen seiner Polygonwinkel beschreiben. Denn man halbire zweene Polygonwinkel FAB, CBA; weil jeder Polygonwinkel < 2 R so ist jedes Hälfte < R also beyder Summe < 2 R also stossen die halbirende Linien irgendwo in K zusammen, daß AK = BK (3. S. 2. Z.). Nun ziehe man KC, so ist △ KBC = △ KBA (2. S.) und KC = KA, KCB = KBC = den halben Polygonwinkel; und so ist ferner von K nach allen Ecken des Polygons gleich weit.

5. Zus.

5. Zus. Wenn AB = BK = BA; so ist AKB = $\frac{2}{3}$R (13. S. 4. Z.) oder der Bogen AB = 60°; also = $\frac{1}{6}$. 360°. Der Halbmesser ist also die Sehne des sechsten Theiles vom Umkreise.

6. Zus. In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Sechseck zu beschreiben, darf man nur darinnen den Halbmesser sechsmahl herumtragen.

7. Zus. Auf eine gegebene Linie DC ein Sechseck zu beschreiben, darf man nur über ihr ein gleichseitiges Dreyeck DKC beschreiben, dieses gibt K, und den Kreis um K mit KD, und das Sechseck (6. Zus.).

8. Zus. Ueber jeder gegebenen Linie DC ein ordentliches Vieleck zu beschreiben, trage man an DC in D und C die halben Polygonwinkel, so gibt sich die Spitze K des gleichschenklichten Dreyecks, und der Kreis, der nach 4. Z. um das Polygon gehet, in dem man also nur die Sehne DC herumtragen darf.

Anm. Dieses Verfahren gibt bey grossen Kreisen und vielseitigen Vielecken ziemliche Fehler, wenn man sich dabey des gewöhnlichen Transporteurs bedienet, ob es gleich der Theorie nach vollkommen richtig ist. Im kleinen aber dient es, sich Begriffe von den Polygonen zu machen, und bahnet uns den Weg zu Vorschriften, die eine richtigere Ausübung geben, aber sich erst in der Trigonometrie erklären lassen. Sonst findet man aus einem gegebenen Polygone, das welches noch einmahl, und das welches halb soviel Seiten hat, durch die Halbirung und Verdoppelung des Bogens. Z. E. aus dem Sechsecke das Zwölfeck und Dreyeck.

9. Zus.

9. Zus. Die Zahl der Seiten sey gerade; oder $n = 2m$ so ist der Centriwinkel (3. Z.) $= \frac{360}{2m} = \frac{180}{m}$; also machen m Centriwinkel; 180° oder das Polygon wird durch Durchmesser, die zugleich Diagonalen sind, in ähnliche Hälften getheilet.

10. Zus. Alle Höhen der Dreyecke, in welche das Vieleck aus dem Mittelpuncte getheilet wird, wie KQ ist, sind gleich (18. S.). Man richte also auf einer unbestimmten geraden Linie 77. F. das Perpendikel $ak = KQ$ auf, und mache $ab = bc = cd = de = ef = fg$, jede einer Seite des Vielecks gleich, so haben die Dreyecke akb; bkc; ckd; u. s. w. alle einerley Inhalt (14. S. 1. Z.) jedes ist nehmlich dem Dreyecke AKB gleich; und also ist die Summe aller Dreyecke wie AKB, das ist das Vieleck, so groß als die Summe aller Dreyecke der 94. F. d. i. als Δ kag; oder als ein Dreyeck, dessen Höhe $= KQ$, und dessen Grundlinie der Umfang des Vielecks ist.

24. S. Lehrs.

Dreyecke von gleicher Höhe BAC, CED 78. F. verhalten sich wie ihre Grundlinien BC, CD;

Bew. Es sey $Bb = Dd$ eine Länge, mit der sich BC und CD genau messen lassen; Also daß $BC = m.\ Bb$; $CD = n.\ Dd$ wo m, n, ganze Zahlen bedeuten. Nun ist $\Delta ABb = \Delta DEd$, (14. S. 2. Z.) und aus eben dem Grunde $\Delta BAC = m.\ \Delta ABb$;

ΔCED

$\Delta CED = n.\ \Delta DEd$; also $\Delta BAC : \Delta CED = m : n. = BC : CD$:

Man sieht leicht daß diese Schlüsse denen des 3. Zus. beym 21. S. vollkommen änlich sind, es stehen nur statt

der dortigen	GKD	FKD	EKD	GD	FD	ED
hier	ΔABC	ΔCED	ΔDEd	BC	CD	Dd

Man wird also auch begreifen, wie gegenwärtiger Satz für Irrationalverhältnisse nach Art des dortigen 11. Zus. erwiesen wird. Um Anfängern in einer Untersuchung die für schwer gehalten wird, alle nöthige Erläuterung zu geben, will ich den Beweis nach Art des dortigen, mit den gehörigen Veränderungen hersetzen. Es sey also der Linien CD : CB Verhältniß irrational, und man nenne die

Dreyecke	$ABC = \alpha$	$CED = \varepsilon$	$DEd = \varkappa$
Linien	$BC = a$	$CD = e$	$Dd = k$

Ferner finde man durch die Halbirung (6. S. 1. Z.) die Linie Dd so daß CD von ihr gemessen wird, oder $e = nk$; so wird wegen der Irrationalverhältniß, BC von ihr nicht gemessen, fällt aber gewiß zwischen zwey Vielfache (multipla) von ihr, und es ist also $a > mk$, oder $< (m+1)k$; welches die Grösse der Linie BC zwischen zwo Gränzen einschließt die nur um k unterschieden sind. Und weil n ohne Ende wachsen, k ohne Ende abnehmen kann, so rücken diese Gränzen so nahe als man will zusammen; daher sich allemahl ein k finden läßt, von dem BC zwar nicht in völliger Schärfe, aber der

Wahr-

Wahrheit so nahe als man will gemessen wird. Hier hat man also wieder Rationalverhältnisse, die der irrationalen BC : CD so nahe als man will kommen. Weil aber jeder Theil = Dd, in den Dreyecken DEC, CAB, Theile = DEd gibt, so ist klar daß eben diese Rationalverhältnisse, der Verhältniß $\alpha : \varepsilon$ so nahe kommen als man will.

Nnn ist $\alpha > m\varkappa$ und $< (m+1)\varkappa$ aber $\varepsilon = n\varkappa$ folglich sowohl $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ als $\frac{a}{e}$ grösser als $\frac{m}{n}$ und kleiner als $\frac{m+1}{n}$. Sind also a : e und $\alpha : \varepsilon$ nicht gleich so sey die erste grösser; und $\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$;

$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + y$ daß $x > y$; folglich $\frac{a}{e} - \frac{\alpha}{\varepsilon} = x - y$ welches eine Grösse seyn muß die sich angeben läßt, wofern beyde Verhältnisse, und daher beyde Quotienten unterschieden sind. Es ist aber sowohl x als y kleiner als $\frac{1}{n}$ und folglich auch ihr Unterschied, und $\frac{1}{n}$ kann kleiner als jede Grösse die sich angeben läßt werden, folglich auch $x-y$; folglich läßt sich zwischen beyden Quotienten, und daher auch zwischen beyden Verhältnissen kein Unterschied angeben, oder sie sind gleich.

1. Zus. Des 20. S. 12. Zus. gilt auch hier, nur daß man statt der dortigen Bogen, Winkel, hier: Grundlinien, Dreyecke schreibt. Ein paar Linien

nien können also allemahl angesehen werden, als hätten sie ein gemeinschaftliches Maas, wenn man dieses Maas unendlich klein, oder als ein Element, annehmen will. Das ist man kann allemahl ein Paar Linien mit einem gemeinschaftlichen Maasse der Wahrheit so nahe ausmessen, daß der Fehler so klein wird als man nur will, wenn man nur dieses Maas immer vermindert. Wenn es also kleiner als jede angegebene Grösse wird oder verschwindet so verschwindet auch der Fehler, und die beyden Mengen, wie vielmahl das Maas in der einen und in der andern Linie enthalten ist, drücken ihre Verhältniß mit einem verschwindenden Fehler, das ist der Wahrheit gemäß aus. Aber diese beyden Mengen lassen sich nicht in Zahlen angeben, sie übersteigen alle Zahlen die man angeben kann, und heissen **unendlich groß**, wie das Maaß unendlich klein. Man erreicht eine solche unendlich grosse Menge nie wirklich, so wenig als das unendlich kleine Maas; Man sieht sie aber als erreicht an, und bedient sich dieser Redensarten, wieder zu Abkürzung des vorigen Vortrages.

Uebrigens kann man die Verhältniß jedes Paares gleichartiger Grössen, es mögen Flächen, Körper, Gewichte, Geschwindigkeiten u. d. g. seyn, durch die Verhältniß eines Paares Linien vorstellen; und daher lassen sich in der nur erklärten Bedeutung zwo gleichartige Grössen allemahl ansehen als hätten sie ein gemeinschaftliches Maas.

Was Ar. V. 25; IIII. 49. von Irrationalverhältnissen gesagt worden, wird durch gegenwärtiges erweitert. Denn es giebt ohne Zweifel mehr Irrationalverhältnisse, als wir dort, nur aus den Quadrat und Cubikwurzeln herleiten konnten.

Anm. Wegen der Schwierigkeit welche die Irrationalverhältnisse bey diesen Beweisen machen, hat Euklides alles auf eine andere Erklärung der Proportion gegründet. Man s. El. V. def. 6. 8. u. das. Clauium.

2. Zus. Der 24. S. gilt auch von Parallelogrammen (14. S. 3. Z.).

25. Satz. Lehrs.

I. Wenn in dem Dreyecke ABC, die Linie DE mit der Grundlinie gleichlaufend gehet, so ist AD: DB = AE: EC. 79. F.

II. Wenn AD: DB = AE: EC so ist DE mit BC gleichlaufend.

Bew. I. Die Dreyecke DEB, DEC sind gleich (14. S. 2. Z) also hat △ADE zu beyden einerley Verhältniß. Es ist aber △ADE: △BDE = AD: DB und △ADE: △CDE = AE: EC (24. S.) also AD: DB = AE: EC.

II. Wenn AD: DB = AE: EC; und △ADE: △DEB = AD: DB; △ADE: △DEC = AE; EC; so ist △ADE: △DEB = △ADE: △DEC das ist △DEB = △DEC; also BC mit DE parallel (14. S. 2. Z.).

1. Zus.

1. Zus. Es ist auch bey I; AD : AE = DB : EC (Arithm. V. 34. verwechselt).

2. Zus. Und AD : AB = AE : AC (Ar. V. 34.).

3. Zus. Wenn in einem Dreyecke AEB, der nur genannte Winkel von der Linie ED halbirt wird; so ist AE : EB = AD : BD; denn man nehme auf der verlängerten AE; EC = EB, so ist AEB = EBC + ECB (13. S. 1. Z.) = 2 ECB (2. S. 3. Z.) also AED = ECB; und ED, CB gleichlaufend, (11. S.) folglich EC oder EB : BD = EA : AD.

4 Zus. Umgekehrt, wenn AE : EB = AD : BD, so halbirt ED den Winkel. Man nehme wieder EC = EB so ist AE : EC = AD : BD; also ED mit CB gleichlaufend, und AED = ACB (12. S.) = $\frac{1}{2}$ (ECB + EBC) (2. S. 3 Z.) = $\frac{1}{2}$ AEB (13. S. 1. Z.).

26. Satz. Lehrs.

Wenn in zwey Dreyecken 80. F. ABC, DCE, die Winkel BAC = CDE; ABC = DCE, und also (13. S.) ACB = DEC; so verhalten sich jede zwo Seiten des einen Dreyecks, wie die beyden Seiten des andern, die den gleichen Winkeln gegenüber stehen.

Bew. Man lege zwo Seiten, die in beyden Dreyecken gleichen Winkeln gegenüber stehen, in eine gerade Linie, wie BC, CE, so ist BA mit CD, und CA mit DE gleichlaufend, (11. S.) und ED stößt verlängert mit BA zusammen (12. S. 1. Z.)

dieses geschehe in F, so ist DF=CA; CD = AF (12. S. 3. Z.). Ferner BA: BC = AF: CE und BC: DF=CE: DE beydes aus (25. S. 1. Z.) schreibt man also CD; AC, statt AF, DF, so ist

BA: BC = CD: CE
BC: AC = CE: DE folglich (Ar. V. 51.)
BA: AC = CD: DE

Zus. Durch die Verwechselung (Ar. V. 34.) werden aus diesen drey Proportionen drey andere, da beyde vorhergehende Glieder zu einem Dreyecke, und beyde folgende zum andern gehören. Z. E. BA: CD=BC: CE u. s. w.

27. Satz.

Es sey in den beyden Dreyecken BAC, bac, 82. F. BA: AC=ba: ac; und AC: CB= ac: cb woraus BA: BC=ba: bc folgt (Ar. V. 51.) so sind die Winkel in der Ordnung gleich, wie sie den proportionirten Seiten gegenüber stehen.

Bew. Man mache pbc = B, pcb = C; so ist vermöge des 26. S. BA: BC=bp: bc; oder wenn man statt der ersten Verhältniß die ihr gleiche im Dreyecke bac setzet ba: bc=bp: bc; also ba =bp; Eben so AC: BC=pc: bc oder ac: bc =pc: bc und ac = pc; Folglich haben die Dreyecke bpc, bac, wie einerley Seiten, so einerley Winkel (4. S.) und es ist abc=cbp=B; acb =bcp = C, a=p=A.

Zus.

Zus. Dreyecke, die einerley Winkel (26. S.) oder proportionirte Seiten (27. S.) haben, sind ähnlich (19. Erkl.) und ähnliche Dreyecke haben beydes; weil aus jedem das andere folgt.

Anm. Da sich zwey Dreyecke entweder durch die Winkel oder durch die Verhältnisse ihrer Seiten unterscheiden lassen, so scheinen diese Sätze schon aus dem Begriffe der Aehnlichkeit zu folgen, weil ähnliche Dinge ohne Zweifel solche sind, die man durch keine andern Merkmahle als ihre verschiedene Grösse unterscheiden kann. Denn ähnliche und gleiche Dinge wie die Dreyecke des 2. 3. 4. S. sind weiter nichts als ein Ding, das man sich zweymahl vorstellt. Daher hat der Freyh. von Wolf diese Lehren auf den Begriff der Aehnlichkeit gegründet. Die Verkürzung der Beweise, die er dadurch gesucht hat, scheinet nicht so beträchtlich, daß man deßwegen den Weg des Euklides verlassen sollte, und in der That ist der neue Weg, wenn man alles in gehöriger Schärfe erweisen will, nichts kürzer. Übrigens hat Euclides eben den Begriff von der Aehnlichkeit gehabt, weil er eben die Dinge ähnlich nennt, die es nach dieser Erklärung sind.

28. Satz. Lehrs.

Wenn in zweyen Dreyecken B = abc, und AB : BC = ab : bc so sind die Dreyecke ähnlich.

Bew. Man mache cbp = B = cba, und bcp = C so sind die Dreyecke BAC, bpc, ähnlich (26. S.) und bp : bc = BA : BC = ba : bc; also bp = ba, und die Dreyecke bpc, bac, ähnlich und gleich (2. S.) also BAC, bac, ähnlich; oder A = a; C = bca, BC : CA = bc : ca.

29. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene Linie AB in Theile zu theilen, die eben die Verhältnisse unter einander haben, wie die gegebenen Theile AD, DE, EG; einer andern Linie: 82. F.

Aufl. An die getheilte Linie AG setze man AB in was für einem Winkel man will, nur daß es bequem ist, ihn weder allzuspitzig, noch stumpf zu nehmen; Man ziehe BG durch die Endpuncte, und damit durch die gegebenen Theilungspuncte D, E, Parallelen DH, EF, so ist AD : DE = AH : HF; DE : EG = HF : FB.

Bew. Die erste Proportion steht selbst im 25. S. daraus wird (Ar. V. 34. zusammengesetzt) AE : DE = AF : HF oder verwechselt; AE : AF = DE : HF = AD : AH wenn man bey der ersten Proportion verwechselt. Und AE : AF = EG : FB (26. S. 1. Z.) also EG : FB = DE : HF = AD : AH; durch welche Arten aus Ar. V. 34. zu schliessen, sich der Beweis fortführen läßt, wie viel auch Theile gemacht sind.

1. Zus. Sollte man AB in eine gegebene Menge gleicher Theile theilen, so darf man nur AG aus so viel gleichen willkührlich angenommenen Stücken AD = DE = EG u. s. w. zusammen setzen.

1. Anm. Hier sucht man der Richtigkeit in der Ausübung wegen, daß dergleichen Stücke nicht allzuviel aneinander gesetzt werden müssen. Ist also die Menge der Theile, die man machen soll, ein Product, z. E. 15 = 3. 5. so

theilet

theilet man AB erstlich in eine Menge von Theilen, die der eine Factor anzeigt, z. E. in 3, und einen dritten Theil wieder in soviel als der andere Factor anzeigt, als hier in 5. Es läßt sich auch diese Aufgabe auf mehr Arten auflösen, und die Ausübung durch Werkzeuge bequem machen, die man bey practischen Schriftstellern leicht verstehet, wenn man die gegenwärtigen Lehren wohl inne hat.

30. Satz. Aufg.

Zu drey gegebenen Linien AB, AC, BD, 83. F. die vierte Proportionallinie zu suchen.

Aufl. Auf die Schenkel eines willkührlichen Winkels, trage man die drey gegebenen Linien; die erste und zweyte, aus der Spitze auf den ersten, und andern Schenkel, die dritte wieder auf den ersten, von dem Puncte an, wo die erste aufhöret. Alsdenn ziehe man BC, und damit DE gleichlaufend, so ist CE die gesuchte vierte, oder AB:AC = BD:CE (25. S. 1. B.).

1. Zus. Wenn BD = AC so findet man auf diese Art zu zwo Linien die dritte,

2. Zus. Hat man so zu zwo Linien, p, q, die dritte f, gefunden, so ist p : f = 2. (p : q) (Ar. VI. 7.). Nun suche man zu q, f, die dritte t, so ist p:t = 3. (p : q) (Ar. VI. 9.) und so kann man fortgehen und Linien wie f, t, u. s. f. finden deren Verhältniß was für eine vervielfachte man will von p:q ist.

31. Satz. Aufg.

Zwischen zwo Linien AB, BC, 84. F. eine mittlere Geometrische Proportionallinie zu finden.

Aufl. Ueber ihrer Summe beschreibe man einen halben Kreis, den ein Perpendikel durch B in D schneide, so ist BD die gesuchte Linie.

Bew. Man ziehe AD, DC, so ist ADC = R (21. S. 1 Z.) das ist ADB + BDC = BDC + C (13 S. 2. Z.) also ADB = C folglich A = BDC (13. S.) und AB : BD = BD : BC (26. S.).

1. Zus. Also kann man die Verhältniß AB : BC halbiren; (Ar. VI. 8.) und in 4; 8; 16; u. s. f. Theile theilen, wenn man die Verhältniß AB : BD, und ihre Hälfte, u. s. w. halbiret.

2. Zus. Jedes rechtwinklichte Dreyeck wird durch das Perpendikel von dem rechten Winkel auf die Hypothenuse in zwey Dreyecke getheilet, die unter sich und dem ganzen ähnlich sind; und also auser der Proportion der Auflösung noch eine Menge anderer geben, die man, wenn sie gebraucht werden, aus den vorigen Sätzen leicht herleitet.

Anwendung der bisherigen Lehren auf die ausübende Geometrie.

32. S. willkührlicher Satz.

Man nehme, gerade Linien zu messen, ein Maaß an, das man einen Fuß nennt. Zehn Fuß machen eine Ruthe; der zehnte Theil eines Fusses aber beträgt einen Zoll, des Zolles zehnter Theil heißt eine Linie. Für kleinere Eintheilungen besondere Nahmen zu machen, ist nicht nöthig, da man sie durch ihre Verhältniß zu den angezeigten bestimmen kann. Die Zeichen der Ruthen, Fusse, Zolle, Linien, seyen mit den Zeichen der Grade, Minuten ꝛc. (13. S. Anm.) einerley.

1. Zus. Also kann man diese Maasse bequem und ohne weitere Rechnung durch die gewöhnlichen Ziffern ausdrücken und in einander verwandeln; z. E. $53^{\circ}\ 4'\ 7''\ 8''' = 53478'''$.

1. Anm. Diese Bequemlichkeit, deren Grösse die Folge noch mehr zeigen wird, hat die Feldmesser veranlasset, nach dem Angeben Stevins, eines holländischen Mathematikverständigen, der die Ausübung mit tiefer Einsicht verband, diese Decimaltheilung zu gebrauchen. Sonst wird von Werkleuten der Fuß gewöhnlich in 12 Zolle getheilet; und so machen an manchen Orten 12 Fuß, auch wohl 15, 16, eine Ruthe, oder auch 6 Fuß, eine Klafter, einen Faden, ein Lachter, eine Toise. Man muß also die zehntheilichte Theilung auf die andere umgekehrt zu bringen wissen. Es sey von einerley Länge $\frac{1}{10} = x$ und $\frac{1}{12} = y$ so ist $10x = 12y$; also 1, 2. $y = x$ und $y = \frac{5}{6}x = x$.

$\frac{5}{6}$ x = x. 0,8333. Soll man z. E. sagen, wieviel 7 Duodecimalzolle an Decimalzollen betragen, so ist 7 y = $\frac{35}{6}$ x = 5,833 . . . x.

2. Anm. Eben so muß man Maasse, die an verschiedenen Orten gebräuchlich sind, in einander zu verwandeln wissen. Insgemein hat man an jedem Orte anfangs den Fuß vest gesetzet, und aus diesem die Ruthe und den Zoll bestimmt. Der Nahme Fuß, zeigt den Ursprung dieses Maasses an, das Jacob Köbels Geometrey, (Frf. 1616.) 4. Bl. auf eine lächerliche Art bestimmen lehret, die aber doch wohl vor diesem ist gebraucht worden und den verdrüßlichen Unterschied des Fußmaasses oft zwischen zweyen benachbarten Dörfern verursacht hat. In Deutschland hat man Ursache den rheinländischen, der auch durch Dänemark eingeführt ist, zu kennen, und in mathematischen und physischen Rechnungen kömmt der pariser (pied du Roy) oft vor. Beyder Verhältniß ist: wenn jener p, dieser r, heißt, p : r = 14400 : 13913; Man hat den Pariser in 12″ diese in Linien, und jede Linie in 10, also den Fuß in 1440 Theile getheilet, durch die man die andern gewöhnlichen Füsse die fast alle kleiner sind, ausdrücket. Wäre die angegebene Verhältniß in der völligen Schärfe richtig, so wäre p = $\frac{1}{1}\frac{4}{3}\frac{4}{9}\frac{0}{1}\frac{0}{3}$ r = r. 1,03500323 wodurch sich wie in der 1. Anm. einer auf den andern bringen läßt. Wenn man keine so grosse Schärfe sucht, die ohnedem die Natur der Sache nicht zuläßt, so kann man bequem die Logarithmen brauchen. Es ist nähmlich l (p : r) = l 14400 — l 13913 = 0,0149418 welcher Logarithme zu 1,0350 gehört, und negativ genommen l (r : p) ist. Setzt man r = 100000 oder zieht man ihn von 5 ab, so kömmt

4,9850582 oder es ist $\frac{r}{p}$ = 0,96618. Auch eine gegebene Menge von Fussen einer Art läßt sich durch die Logarithmen bequem in eine andere verwandeln. Z. E. wie viel rheinländische Fuß machen 6 Pariser? Die Zahl der

rhein-

rheinländischen sey = x so ist 6 p = xr oder 6 p : r = x folglich

$$\begin{aligned} 1\,(p:r) &= 0{,}0149418 \\ 16 &= 0{,}7781512 \\ \hline 1\,x &= 0{,}7930930 \end{aligned}$$

gibt x = 6,2050; aber 6 r ist die halbe rheinländische zwölftheilige Ruthe; also beträgt die Toise r. 0,205 über diese halbe Ruthe, oder 2 Toisen machen 12,41. r das ist eine rheinländische Ruthe, und $\frac{41}{1200}$ des Fusses, oder 2 Toisen

$= 1^{\circ} + \frac{41^{\circ}}{1200} = 1,^{\circ}03416$ also 1 Toise $= 0,^{\circ}51708$

Sturm im veritable Vauban, pag. 101, und and. rechnen bey den Maassen, die in der Fortification angegeben werden, 2 Toisen für eine Ruthe; hier kann man sehen, ob der hiebey begangene Fehler beträchtlich ist oder nicht. So sind 180 Toisen = 90. 2 Toiſ. = 90° + 90. 0,41 r das letzte beträgt 36,9 r und wenn man also mit Sturmen 90° statt 180 Toisen nimmt, so macht man diese Linie um 3° 9, zu kurz.

3. Anm. Zuweilen will man Maasse vergleichen, deren Verhältniß nicht unmittelbar, sondern durch andere mittlere gegeben ist, da denn die Kettenregel (Ar. V. 56.) dienet, und die Logarithmen bequem angebracht werden. Es sey z der zellische Fuß und a der londner, und man suche die Verhältniß z : a aus folgenden.

z : r = 48 : 51 (Comm. soc. R. sc. Gott. T. II. p. 85.)
r : p = 13913 : 14400
p : a = 1142 : 1070 (Helsham Phyſ. p. 368)

z : a = 48. 13913. 1142 : 51. 14400. 1070

l 51	= 1,7075702	l 48	= 1,6812412
l 14400	= 4,1583625	l 13913	= 4,1434207
l 1070	= 3,0293838	l 1142	= 3,0576661
	8,8953165		8,8823280
	8,8823280		
	0,0129885		

Also z : a = 10000 : 10304.

Wenn man z : r wegläßt so folgt aus obigen Proportionen a : r = 1 : 1,0312 oder r = a 1,0312 auch $\log \frac{r}{a} = 0{,}0133405$. a = r 0,96974

Aus Krausens Contoristen VII. Taf. ist r : a = 13913 : 13516 daher $\log \frac{r}{a} = 0{,}0125716$ dieß gäbe r = a 1,0294.

4. Anm. Eine Linie in viel Theile zu theilen und solche bequem abzunehmen, dienet der verjüngte Maaßstab, dessen Verzeichnung für das zehntheiliche Maaß folgende ist:

Die Länge A k 85. F. gelte eine Ruthe. Man theile sie in zehn gleiche Theile A a = a b = b c u. s. f. (29. S. 1. Z.) und richte auf ihr ein Perpendikel A L auf, welches man aus eben den vorigen, oder aus zehn andern, doch unter sich gleichen Theilen A B = B C u. s. f. zusammensetze. Durch die Theilungspuncte von A L ziehe man mit A k gleichlaufende Linien, die ich Querlinien nennen will; auch ziehe man a L, und mit dieser gleichlaufende Linien b 9; c 8; u. s. f welche schiefe Linien heissen sollen, und deren letzte k 1 i; und nachdem man L M = A k gemacht, ziehe man k M so kann man innerhalb des Rechtecks A L M k alle Fusse und Zolle nehmen, die zusammen weniger als 1° betragen. Das Dreyeck A L a gibt die Fusse, durch die Stücken der Querlinien, die zwischen K und L a, I und L a, H und L a u. s. f. fallen, als welche Stücke 1, 2, 3, u. s. f. Fuß sind (26. S.). Eben so enthält das Dreyeck k 1 M auf den Stücken Querlinien, welche zwischen k 1, k M abgeschnitten werden, die Fusse von k nach M hinaufwärts. Jedes Paar schiefe Linien aber schneidet zwischen sich von allen Querlinien gleich grosse Stücken ab (12. S. 3. Z.). Will man also z. E. 7' 8'' nehmen, so fasse man anfangs mit dem Zirkel die Länge a h = 7; Man wird eben diese Weite zwischen den beyden Durchschnittspuncten jeder Querlinie mit a L und h 3 haben. Man gehe also in die Querlinie, wo eines von beyden vorerwähnten Dreyecken 8'' gibt. Im Dreyecke A L a gibt solches

die

die Querlinie durch C; Nachdem man also vorerwähntermassen die beyden Zirkelspitzen über die Durchschnitte dieser Querlinie mit aL; h 3; gebracht hat, so lasse man die Spitze, die sich über dem letzten Durchschnitte findet, unverrückt stehen, öffne aber den Zirkel, daß die andere Spitze über C kömmt: So ist das Stück Querlinie zwischen C und ihrem Durchschnitte mit h 3 so groß als 7′ 8″; Wollte man die Zoll in dem Dreyecke k 1 M nehmen, so mußte man in die Querlinie durch I gehen, und die beyden Zirkelspitzen, deren Weite = a h ist, über dieser Querlinie Durchschnitte mit d 7 und mit k 1 bringen; alsdenn die eine Spitze über dem Durchschnitte mit d 7 stehen lassen, die andere über den Durchschnitt mit k M bringen.

Will man nun auch ganze Ruthen nebst Fuß und Zoll nehmen, so darf man nur die Länge A k, von k rechter Hand oder von A linker Hand auf die verlängerte A k so vielmahl es angeht tragen, und durch die Puncte, die sich solchergestalt geben, Perpendikel ziehen. Es sey z. E. k p = A k = M P; und man wollte 1 ° 9′ 6″ nehmen, so faßte man mit dem Zirkel erstlich p a = 1 ° 9′; Wenn man nun mit unveränderter Oefnung des Zirkels die eine Spitze p P hinauf führet, so bleibt die andere nicht in a L sondern beschreibt ein Perpendikel durch a auf A k; Man gehe mit dem Zirkel solchergestalt bis dahin, wo das Dreyeck k 1 M, 6″ angibt. Das geschiht da, wo es zwischen seinen Seiten k 1, k M, ein Stück der Querlinie durch G enthält. Folglich hat man die verlangte Weite, wenn man die beyden Zirkelspitzen über die Durchschnitte der Querlinie durch G mit p P und mit a L bringt, nähmlich vom Durchschnitte mit p P bis an den mit k M ist 1 °; Von dem mit k 1 bis an den mit a L sind 9′; und von dem mit k 1 bis an den mit k M sind 6″; die Zolle fallen hier zwischen die Ruthen und Fusse. Man hätte sie in dem Dreyecke A L a genommen; wenn die Ruthen auf die Verlängerung von h A linker Hand von A wären getragen gewesen. Man begreift hieraus, wie die Zahlen können an diesen

Maaß-

Maaßstab gesetzt werden. Wenn die Ruthen, wie in meiner Zeichnung, rechter Hand liegen, so werden die Zahlen oben von M nach L wie ich gethan habe, geschrieben, und statt K, I, H, G, u. s. f. kommen 1, 2, 3, 4, u. s. f. welche Zahlen sich auf die Zolle, beziehen die das Dreyeck k1 M angibt: Statt a, b, c, . . . kann man 1, 2, 3, . . . setzen. Werden aber die ganzen Ruthen linker Hand von A getragen, so kommen von L nach M die Zahlen in der Ordnung 0, 1, 2, . . . daß 10 in M kömmt. An die Stellen von L, K, I, . . . kömmt nichts, aber von M nach k herunter kömmt an die Durchschnitte der Querlinien 0, 1, 2, . . . bis 10 k; welche Zahlen sich auf die Zolle beziehen, die das Dreyeck L A a angibt.

5. Anm. Wird solchergestalt Ak noch neunmahl nach einer von beyden Seiten getragen, so bekömmt man eine ganze Länge 10. Ak von der man vermittelst dieser Verzeichnung tausendtheile wie man will, deren Menge nicht über 1000 beträgt, nehmen kann. Jede nähmlich der Längen, die = Ak sind, gilt 100. solcher Theile; jeder Fuß 10; und jeder Zoll 1. Dieser Gebrauch des Maasstabs kömmt häufig vor.

6. Anm. Linien, welche nur eine mittelmäßige Menge von Ruthen enthielten, würden auf keinem Papiere können dargestellt werden, wenn Ak = 1 R. seyn sollte. Man läßt daher insgemein Ak = 10. R. seyn, daß Aa = 1 R. ist, und also was zuvor Zolle waren, jetzo Fusse werden, die Zolle aber gar wegfallen.

7. Anm. Die älteste Nachricht, die mir von diesem Maasstabe bekannt ist, finde ich in Tychos von Brahe Schriften. Er hat auf ähnliche Art, die Werkzeuge, die man Winkel zu messen braucht, abzutheilen gesucht, um die Winkel sehr scharf dadurch zu bekommen, und bekennt, daß er diese Abtheilung bey geraden Linien anzubringen, zu Leipzig, wo er studirt hat, in seinem 17 Jahre (um 1553.)

von

von dem dasigen geschickten Professor der Mathematick Johann Hommeln gelernt. Epistolar. Astronomicar. L. I. p. 62.

8. Anm. Aus eben dem theoretischen Grunde lassen sich Maasstäbe verzeichnen, die etwas anders aussehen, oder andere Eintheilungen des Ganzen voraussetzen.

33. S. Foderung.

Gerade Linien auf dem Felde zu messen, und ihrer Lage und Länge nach abzustecken.

Dieser Satz und die folgenden Foderungen sind eigentlich Aufgaben: Aber ihre Auflösung läßt sich nicht so gut sagen als zeigen. Man bedient sich zum Messen insgemein einer Meßkette, und zum Abstecken Stäbe, welche hier Puncte bedeuten. Man mißt die Linien auf der Erde, und meistens bestimmt man ihre Lage durch solche Theile der Stäbe, die weit über der Erde sind. Also müssen die Stäbe auf der Fläche, auf der man mißt, senkrecht stehen. Warum eigentlich dieses nöthig ist, und wie man es erhalten muß, lehret die folgende Geometrie. Ich begehe aber diesen Fehler wieder die Methode, daß ich dergleichen hier schon voraussetze, mit Willen. Die Ungeduld, mit welcher Anfänger insgemein eine Anwendung der theoretischen Lehren auf diese so genannte Ausübung verlangen, läßt sich hier auf eine solche Art stillen, daß sie empfinden, es sey noch mehr Theorie nöthig, wenn die Ausübung ihre gehörige Richtigkeit haben soll, und also vielleicht dadurch auf Sätze aufmerksam werden,

die

die sie sonst als leere Betrachtungen würden verabsäumet haben. In der That setzt die practische Geometrie auch noch verschiedene andere Lehren, aus der Optik, Mechanik, Naturlehre, u. s. w. zum voraus, die also auch nützlich seyn müssen, wenn sie nützlich ist, und ohne diese Lehren nicht richtig ausgeübt werden kann. Bey dem gegenwärtigen Vortrage der practischen Geometrie muß man solche Lehren als Erfahrungen annehmen.

34. S. Aufgabe.

Eine Weite AB 86. F. zu finden, die man unmittelbar nicht messen kann.

I. Fall. Wenn sich ein Stand C annehmen läßt, von dem man nach beyden Enden der Weite messen kann.

Aufl. Man messe CA, CB, und trage diese Längen auf die rückwärts verlängerten Linien in a; b; daß nähmlich ACa; BCb; gerade Linien sind, und Ca = CA; Cb = CB, so ist ab = AB (8. S. 4. Z. und 2. S.).

Zus. Wenn sich hinter C Verhinderungen finden, die das Zurücktragen der ganzen Linien nicht verstatten, so trage man einerley Stücke von beyden in d, e, z. E. Cd = $\frac{1}{2}$ CA; Ce = $\frac{1}{2}$ CB so ist de auch ein solches Stück von AB; z. E. hier $\frac{1}{2}$ AB. (28. S.). Eben so könnte man auf den Linien CB, CA selbst, einerley Stücke von ihnen CE, CD, ohne Zurücktragung, nehmen. Doch muß

man

man bedenken, daß kleine Fehler, die man bey der Abmessung von d e beginge, sich bey dem Schlusse auf A B vervielfältigten.

II. Fall. Wenn man vom Stande C nach A aber nicht nach B kommen kann. 86. F.

Aufl. Man trage C A zurück in C a, und an a den Winkel C a P = C A B (10. S.) alsdenn gehe man in der Linie a P fort, bis man zugleich in B C kömmt, der Punct, wo man sich alsdenn befindet b, gilt a b = A B (3. S.).

Anm. Nimmt man auf C A nach Gefallen eine Länge C D macht E D C = B A C wie vorhin so daß E in der Linie C B ist, und mißt D E, so kann man sagen C D: D E = C A: A B: (26. S.). Dieses lehret Christoph Puehlers kurze und grundliche anlaytung zu dem rechten verstand *Geometriae &c.* Dilingen 1583. in 50. C. Nimmt man für C D ein Stück, das C A mißt, so hat man A B durch eine leichtere Rechnung.

III. Fall. Wenn man von C weder nach A noch nach B kommen kann.

Aufl. Man nehme einen Stand, von dem man nach C kommen kann; und finde C A; (11. Fall) imgleichen eben so C B; so lassen sich beyde zurücktragen und geben a b = A B (1. F.).

1. Anm. Diese Auflösung wird wegen der vielen Arbeit, die sie erfodert, selten gebraucht, da man die Frage vermittelst der nächstfolgenden Werkzeuge leichter beantworten kann. Man heißt aber das bisherige Feldmessen: mit blossen Stäben oder ohne Instrumente.

2. Anm. Weiten die man nicht unmittelbar messen kann, werden als Seiten eines Dreyecks betrachtet, von dem

dem man soviel mißt, daß man ein anderes ihm gleiches oder ähnliches verzeichnen kann. Hierauf, und also auf der Lehre von gleichen und ähnlichen Dreyecken, beruhet die ganze Feldmeßkunst.

35. S. Foderung.

Ein paar Linien auf dem Papiere zu ziehen, die eben den Winkel machen, den ein paar Linien auf dem Felde machen.

Dieses geschieht vermittelst des Meßtischchens und des Linials mit Absehen oder Dioptern, auch der Winkelscheibe, deren Gebrauch in Zollmanns Geodaesie umständlich gelehret wird.

1. Zus. Gesetzt, man hätte auf dem Felde das Dreyeck A B C (81. F.) in welchem man die Seite A B gemessen hätte. Man zeichnete auf Papiere ein Dreyeck a b c, dessen Seite a b man nach dem verjüngten Maasse soviel Ruthen, Fuß, Zoll, lang nähme, als man A B nach dem wirklichen Maasse gefunden hätte, an a, b, aber setzte man die Winkel a = A; a b c = B an; so wäre das Dreyeck auf dem Papiere, dem auf dem Felde ähnlich, (26. S.) und b a: b c = B A: B C; b a: a c = B A: A C; also müßten b c, c a, nach dem verjüngten Maasse so viel Ruthen, z. E. halten, als B C, C A, nach den wirklichen. Dieses diente also, die Linien im Dreyecke auf dem Felde, aus dem gezeichneten zu finden, ohne daß man sie messen dürfte. Hätte man b a nicht nach dem verjüngten Maasse so lang genommen als B A nach dem wirklichen Maasse; so könn-

te man doch die Seiten des grossen Dreyecks aus den angegebenen Proportionen berechnen, aber durch Regeln Detri, die dieses Verfahren erspart.

2. Zus. Wenn man auf irgend eine andere Art, z. E. nach dem 28. S. das Dreyeck auf dem Papiere dem auf dem Felde ähnlich machen kann, und nur eine Seite von jenem nach dem verjüngten Maasse soviel hält als die ihm zugehörige Seite in diesem, nach dem wirklichen Maasse, so findet dieses bey allen Seiten beyder Dreyecke statt.

3. Zus. Man begreift leichte, daß die Seiten des Dreyecks auf dem Papiere sehr genau müssen gemessen werden, weil kleine Fehler bey ihnen grosse bey den auf dem Felde geben können. Daher muß der verjüngte Maaßstab nicht allzu klein seyn.

Anm. Eine Linie auf dem Papiere, die nach dem verjüngten Maasse so viel hält als eine andere auf dem Felde, will ich der Kürze wegen, dieser gemäß nennen.

36. S. Aufg.

Den 34. Satz vermittelst des Meßtischchens aufzulösen.

1. Fall. 87. F. Man stelle es über C; den Punct des Meßtischchens, der gerade über C stehet, will ich c heissen. Man ziehe nach A, B, zu darauf Linien ca, cb, die man nach dem verjüngten Maasse so groß mache als CA, CB, nach dem wirklichen Maasse sind, so ist ab dem verjüngten Maasse nach

so groß als A B nach dem wirklichen, (28. S.) oder ihr gemäß.

II. Fall. 88. F. Vom Puncte c über C; ziehe man nach A zu, ca der Linie CA gemäß, von c aber nach B zu ziehe man cp von unbestimmter Länge. Nun stelle man a über A, und ac so daß sie von A nach C zu geht, und ziehe von a nach B eine Linie, welche cp in b schneidet: So ist ab der AB gemäß (26. S.).

III. Fall. 89. F. Man nehme eine Standlinie, die man messen kann CD, an; von dem Puncte c des Meßtischchens, der über C stehet, ziehe man nach D zu, cd der CD gemäß; imgleichen, indem man cd in dieser Lage unverrückt läßt, nach A, B, zu unbestimmte Linien cα, cβ;

Nun trage man es in D und stelle d über D, und dc längst DC, ziehe darauf von d nach A, B, Linien, welche die vorigen in a, b, schneiden, so ist ab die gesuchte Weite nach dem verjüngten Maasse.

Denn △ acd ∽ △ ACD (26 S.) also cd:ca = CD:CA
und △ bcd ∽ △ BCD cb:cd = CB:CD
folglich (Arithm. V. 51.) cb:ca = CB:CA
Nun ist aber auch acd = ACD; bcd = BCD, also acb = ACB und △ acb ∽ △ ACB (28. S.) also ca:ab = CA:AB und cd:ab = CD:AB.

Anm. Wollte man 91. F. die Weite BA finden, ohne das Tischchen fortzurücken, wie sonst nach dem II. F. geschehen muß; so stecke man Stäbe in C, D, mit A in gerader Linie, ziehe auf dem Meßtischchen von b nach A

eine

eine unbestimmte Linie, und nach C, D, bc, bd, den BC, CD, gemäß, so wird dc verlängert die Linie von b nach A, in a so schneiden, daß ba der BA gemäß ist. Denn △ bcd ∽ △ BCD (28. S.) also bca = BCA (8. S.) und weil cba = CBA so ist △ bca ∽ △ BCA (26. S.) und bc: ba = BC: BA.

2. Anm. Wollte man also die Weite AE, an deren beyden Enden man nicht kommen kann, aus dem einzigen Stande B finden, so dürfte man nur noch in die Linie ED einen Stab F stecken, von b nach F eine Linie ziehen und sie der BF gemäß machen. So gäbe sich ein Punct f auf dem Meßtischchen durch welchen und d eine Linie gezogen, eine Linie, die von b nach E gezogen würde, in einem Puncte e schneiden würde, dessen Weite von a nach dem verjüngten Maasse soviel betrüge als AE nach dem wirklichen. Der Beweis fließt eben aus der Aehnlichkeit der Dreyecke. Auf diese Aufgabe, die in Schwenters Geom. Pract III. Tract. I. B. X. Aufg. steht, gründet sich das Feldmessen aus einem Stande, davon Ehrenberger in drey zu Coburg 1746. herausgegebenen programmatibus; de nouis problematib. geom. campestrib. gehandelt hat. Es verdiente gebräuchlicher zu seyn, als es ist, da die mehrere Mühe, die es mit Messung der Linien erfodert, dadurch vergolten wird, daß die Fortsetzung des Tischchens vermieden wird: welches man nicht allemahl richtig genug wieder in seine gehörige Lage bringet.

3. Anm. Linien die einen sehr spitzigen Winkel machen, lassen sich nicht wohl ziehen daß man ihren Durchschnitt genau bemerken kann; sie schleifen sich lange an einander hin. Daher vermeidet man gern sehr spitzige Winkel, und folglich auch sehr stumpfe die allemahl sehr spitzige zu Nebenwinkeln haben. Es kömmt meistens auf die Wahl des Standes an. Die Trigonometrie, sowohl die gemeine, als die welche mit der Analysis verbunden worden, zeigt was für Fehler in die Seiten aus den Winkeln und umge-

kehrt fliessen können, und wie man dieses beym Feldmessen zu brauchen hat. Denn da unsere Messungen alle nur beynahe wahr sind, so wissen wir nichts, wenn wir nicht wissen wieviel wir fehlen können. Wer also die ausübende Geometrie gehörig treiben will, muß sich um diese theoretische Kenntnisse bekümmern, zu denen unten in der Trigonometrie die Gründe gelegt werden. Hievon handeln Wolfii Elementa Trigonometr. Lat. §. 58. Rog. Cotesius de aestimatione errorum in matheſi mixta, bey den opusculis die seiner Harmoniae mensurarum beygefügt sind. Marinoni de re ichnographica L. I. cap. V. Boguer de la figure de la terre sect. 2. art. 3. Mein Aufsatz von den Fehlern bey der practischen Geometrie, (om geometriska aberrationer) in den Abhandlungen der Kön. Schwedisch. Akad. der Wissensch. 1753. 2. Quartal.

37. Satz. Foderung.

Die Grösse eines Winkels auf dem Felde in Graden (22. S. 5. Z.) zu finden, und einen Winkel von eben so viel Graden auf Papier zu verzeichnen.

Die gemeine Bewerkstelligung dieser Foderung geschieht durch die Astrolabia, Winkelmesser oder Scheibeninstrumente und den Transporteur.

38. Satz. Aufgabe.

Den 34. Satz vermittelst des Winkelmessers aufzulösen.

Aufl. I. Fall. 87. F. Man messe den Winkel C, und die Seiten CA, CB, woraus sich vermittelst des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes ein kleines Dreyeck wie acb auf dem Meßtischchen war,

war, verzeichnen läßt; in dem man ab mißt, um AB zu wissen.

II. Fall. 88. F. CA und die Winkel C, A, gemessen, geben ebenfalls ein kleines Dreyeck, das dem grossen ähnlich ist.

III. Fall. 89. F. Man messe die Standlinie, CD, und mache ihr nach dem verjüngten Maaßstabe cd gemäß. Ferner messe man ACD, BCD, ADC, BDC, und setze in eben solchen Winkeln Linien an c, d, wodurch sich die Puncte a, b auf dem Papiere geben, deren Weite der Weite AB gemäß ist.

Anm. Dieses Verfahren ist von dem nächstvorhergehenden nur darinnen unterschieden, daß die kleine ähnliche Figur hier besonders muß gezeichnet werden, die sich bey dem Meßtischchen gleich während der Arbeit selbst gibt. In dieser Bequemlichkeit hat also das Meßtischchen ohnstreitig den Vorzug. Es ist aber in andern Absichten nicht vermögend, der Richtigkeit eines vollkommenen Winkelmessers gleich zu kommen, den man daher bey grossen Messungen vorzuziehen hat. Man soll aber von rechtswegen auf ihm nicht nur ganze und halbe Grade, sondern auch Minuten haben können, und sein eigentlicher Gebrauch ist mit der Trigonometrie verbunden.

1. Zus. Eine Höhe AB; 90. F. ist eine Weite, zu deren einem obern Ende B, man nie kommen kann. Kann man von einem angenommenen Stande C, an das untere Ende A kommen, so stelle man das Instrument gerade über C in D, und bestimme den Winkel EDB, wo DE wagrecht angenommen wird; dieser nebst DE = CA (12. S. 3. Z.) gibt in dem

bey E rechtwinklichten Dreyecke B E D die Seite B E; zu der man die Höhe des Instruments D C = E A addirt um B A zu haben.

2. Zus. Wenig Dinge, an denen man Höhen messen will, gestatten, was der 1. Zus. annimmt. Kann man also auch nicht an A kommen; so muß man A B aus zween Ständen D, G, messen. Die Winkel B D E; B G E, und die Standlinie D G, geben das Dreyecke B D G; hat man solches nach dem verjüngten Maaßstabe gezeichnet; so fälle man von seiner Spitze B auf G D das Perpendikel B E zu dem man wie vorhin die Höhe des Instruments addiret. Ich setze zum voraus, daß der Boden A C F wagrecht ist, und D, G, in einer wagrechten Linie, und einer lothrechten Ebene durch B A sind: Abweichungen hievon erfodern Aenderungen in dem vorgeschriebenen Verfahren, die sich aber hier auser der Weitläuftigkeit, mit der ich sie erklären müßte, nicht alle vollkommen verstehen, noch weniger erweisen lassen.

3. Zus. Wenn man von D den Punct A der lothrecht unter B liegt, sehen, aber nicht dahin kommen kann oder will; so messe man B D E, E D A, = R — A D C; und D C; also kann man nach dem verjüngten Maaßstabe D C ziehen, und daran A D C imgleichen ein Perpendikel durch C setzen, so gibt sich der Punct A; durch diesen richte man ein Perpendikel auf C A auf, ziehe D E mit C A gleichlaufend, und daran D B in dem Winkel E D B; so

schneis

schneiden DB und das Perpendikel durch A einander in B. Dieses Verfahren geht bey einer auch nur mittelmäßigen Höhe BA nicht wohl an, wenn DC die blosse Höhe eines gewöhnlichen Feldmesserswerkzeugs wäre, weil die Dreyecke da gar zu spitzige Winkel bekämen; aber es kann gebraucht werden, wo DC gegen BA nicht so gar sehr geringe ist, z. E. die Höhe eines Thurmes, aus dem Fenster D eines gegenüberstehenden Hauses zu finden; wenn nur A lothrecht unter B liegt.

39. Satz. Lehrsatz.

Wenn die Figuren ABCDE, abcde, 92 F. einander ähnlich, und zwar die Seiten in der Ordnung wie einerley Buchstaben an ihnen stehen, einander proportionirt sind, so ziehe man nach Gefallen durch D, C, Linien, die einander in F schneiden, und durch d, c, Linien in eben den Winkeln mit dc die einander in f schneiden. Die beyden Puncte F, f, heissen ähnlichliegende, und wenn man aus ihnen an alle Winkel der Figuren gerade Linien zieht, so entstehen lauter ähnliche Dreyecke.

Bew. △ DFC ∽ △ dfc (26. S.) also DF: CD = df: cd aber CD : DE = cd : de (19. Erkl.) folglich DF : DE = df : de (Ar. V. 51.) und weil FDC = fdc; EDC = edc (19. Erkl.) so ist EDF = edf, also △ EDF ∽ △ edf (28. S.): diese Aehnlichkeit der letztgenannten Dreyecke folgte aus der angenommenen Aehnlichkeit der ersten Drey-

ecke DFC, dfc; und so erhellt, daß aus der Aehnlichkeit der Dreyecke EDF edf, die Aehnlichkeit der an ihnen anliegenden EAF, eaf, folget, und so aus der Aehnlichkeit jeden Paares Dreyecke, immer die Aehnlichkeit des nächstanliegenden Paares geschlossen wird.

1. Zus. Da die Lage des Punctes F ganz willkührlich ist, so kann man ihn in einem Winkel annehmen, da denn f in eben den Winkel der andern Figur fallen muß, und von den Linien FC, fc, u. s. f. zwey Paare, Seiten der Figuren, die übrigen Diagonalen werden Also werden ähnliche Figuren durch ihre Diagonalen in ähnliche Dreyecke getheilet 93. F.

2. Zus. Auf einer gegebenen Linie dc, eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen Figur ABCDE ähnlich ist, theile man die gegebene Figur durch Diagonalen in Dreyecke: und setze auf dc ein Dreyeck dcb das dem DCB ähnlich ist (26. S.) wieder auf db eines dab das dem DAB ähnlich ist, u. s. f. setze man die ähnlichen Dreyecke auf ähnliche Art aneinander.

3. Zus. Man lege in der 94. F. f auf F, und fd, fc, längst FD, FC, so fallen auch fa, fb, fe, u. s. f. längst FA, FB, FE, u. s. f. und die Seiten der kleinen Figur liegen mit den Seiten der grossen gleichlaufend (12. S.). Und umgekehrt, wenn man in FA, durch einen willkührlichen Punct a, ab mit AB, denn durch b, bc mit BC u. s. f.

gleichlaufend ziehet, so wird die innere Figur der äusern ähnlich. Denn wäre sie ihr unähnlich, so mache man über a b eine Figur, die der äusern ähnlich ist, (2. Z.) so werden die Seiten dieser ähnlichen Figur vermöge des ersten Theils gegenwärtigen Zusatzes mit den Seiten der äusern gleichlaufend seyn: Also ist ihre Seite, die durch b geht, mit B C parallel; und muß daher b c seyn (12. S. 1. Zus.) u. s. w.

40. Satz. Aufgabe.

Eine Figur in Grund zu legen; d. i. auf dem Papiere eine Figur zu entwerfen, welche der auf dem Felde ähnlich sey.

Aufl. Man stelle sich die Figur auf dem Felde in Dreyecke getheilt vor und messe von jedem soviel, daß man eines zeichnen kann, das ihm ähnlich wird (39. S. 2. Zus.). Diese allgemeine Auflösung läßt sich nach den verschiedenen Umständen, die man annimmt, in Fälle zergliedern. Ich will nur drey zu Beyspielen anführen.

I. Wenn man in die Figur auf dem Felde ABCDE 92. F. kommen, und nach Gefallen darinnen messen kann. Da nehme man F nach Gefallen an, und messe der Dreyecke F A B; F B C; u. s. f. ihre Seiten F A, F B, F C, u. s. w. ingleichen ihre Winkel bey F, so kann man um einen Punct f herum ähnliche Dreyecke f a b, f b c, u. s. f. beschreiben (28. S.) Das Meßtischchen, über F gesetzt, gibt diese ähn-

liche Dreyecke gleich selbst wie 94. F. Man hat auch nicht nöthig alle die langen Linien aus F zu messen, sondern kann statt ihrer zuweilen Seiten brauchen. Z. E. wenn man F C nicht messen wolte, aber b auf die gehörige Art bestimmt hätte, so zöge man f b und machte daran einen Winkel = B F C, dieses Winkels andern Schenkel durchschnitte man aus b mit einem Kreise, dessen Halbmesser der Linie B C die man messen müßte, gemäß wäre, so gäbe sich c; Weil es aber zweene Durchschnitte gibt, so muß man acht geben, ob B C F spitzig oder stumpf ist, und daher dieses Verfahren nicht brauchen, wenn er beynahe ein rechter ist, weil da beyde Durchschnitte zu nahe zusammen kommen, auch muß man zuweilen Linien von F an die Winkel, zur Probe und Versicherung messen.

Will man sich die Mühe geben alle Seiten, und alle Diagonalen zu messen, so kann man ein Feld auf diese Art nach der 93. F. in Grund legen, ohne daß man einiges anderes Werkzeug dazu braucht, als Stäbe und Meßkette. Dieses Verfahren gibt in der That die meiste Richtigkeit, aber es ist mühsam.

II. Kann man nicht in die Figur kommen, aber um sie herum gehen, so messe man 94. F. alle Seiten und Winkel.

III. Kann man aus zween Ständen alle Winkel einer Figur 94 F. übersehen, so lassen sich die Längen ihrer Seiten und derselben Lagen gegen einander

nach

nach 36. 38. S. III. Fall finden, auf welche Art ganze Gegenden in Grund geleget werden.

Anm. Das bisherige enthält beynahe völlig die Theorie des Feldmessens. Die Ausübung setzt, auser der wirklichen Handanlegung, noch verschiedene Kenntnisse zum voraus, die man aus besondern Büchern erlernen muß. Man wird solches mit leichterer Mühe thun, wenn man das bisherige wohl gefaßt hat, und dadurch im Stande seyn, sowohl die Beschaffenheit der Werkzeuge richtiger zu beurtheilen, als sich bey vorfallenden Schwürigkeiten zu helfen. Die Vorschriften, wie man bey solchen Schwürigkeiten verfahren soll, sind eine Last für das Gedächtniß handwerksmäßiger Feldmesser, wenn ihre Erfindung ein Vergnügen für den Verstand des Geometers ist.

41.. S. Lehrs.

In dem Kreise 63. F. ist die Hälfte des Bogens AIB, von ihrer Sehne, nicht so beträchtlich unterschieden, als der ganze Bogen von seiner Sehne.

Bew. Der Bogen AI ist die Hälfte des Bogens AIB (17. S.) aber jenes Sehne, oder die gerade Linie AI ist grösser als AF, (15. S.) die Hälfte der Sehne AB, des Bogens AIB. (17. S.) Es sey also der Bogen AIB — seiner Sehne = u; so wäre der Bogen $\frac{1}{2}$ AIB — der halben Sehne des Bogens AIB = $\frac{1}{2}$ u; und folglich ist der Bogen $\frac{1}{2}$ AIB — seiner Sehne $<$ $\frac{1}{2}$ u oder der Bogen AI — seiner Sehne $<$ $\frac{1}{2}$ u; Also beträgt der Unterschied zwischen dem halben Bogen und seiner Sehne, weniger als die Hälfte des Unterschiedes zwischen dem ganzen Bogen und seiner Sehne; Wenn u = $\frac{r}{n}$ AIB al-

so

so der Unterschied zwischen dem ganzen und seiner Sehne ein gewisses Stück des ganzen Bogens ausmacht, so ist der Bogen AI — seiner Sehne $< \frac{1}{2}$. $\frac{r}{n}$ AIB das ist $< \frac{r}{n}$. Bog. AI, oder der Unterschied zwischen dem halben Bogen und seiner Sehne macht ein geringer Stück des halben Bogens aus; d. i. er ist in Vergleichung mit dem halben Bogen nicht so beträchtlich, als der Unterschied bey dem ganzen Bogen in Vergleichung mit dem ganzen war.

1. Zus. Man kann allezeit einen Bogen finden, der von seiner Sehne weniger unterschieden ist, als eine gegebene gerade Linie, die ich m nennen will, sie mag so klein seyn als sie will. Denn man nehme nach Gefallen einen Bogen AIB; dessen Sehne AB wird von ihm um eine gewisse Grösse = u unterschieden seyn. Es ist nicht nöthig zu wissen, wie groß u ist; genug, daß es eine endliche Grösse seyn muß, weil der Bogen und seine Sehne gewiß nicht einerley Länge haben; (hätten sie einerley Länge, so wäre ihr Unterschied schon kleiner als m). Ist nun u $<$ m, so hat man schon das Verlangte. Ist aber u $>$ m, so findet man vermöge des Satzes einen Bogen, dessen Unterschied von seiner Sehne $< \frac{1}{2}$ u; und die fortgesetzte Halbirung (17. S.) gibt Bogen deren Unterschiede von ihren Sehnen, kleiner als $\frac{1}{4}$ u; $\frac{1}{8}$ u; $\frac{1}{16}$ u, u. s. f. werden, worunter nothwendig welche vorkommen müssen, die kleiner als m sind.

2. Zus.

2. Zus. EF 63 F. der Sehne AB Weite vom Mittelpuncte ist $= r\,(EAq - \frac{1}{4}ABq)$ und wächst also wenn die Sehne abnimmt, bis an den Halbmesser wenn die Sehne bis auf Nichts abnimmt. Wie es also nach dem 1. Zus. Sehnen gibt, die von ihren Bogen weniger als um jede gegebene Grösse unterschieden sind, so gibt es auch welche, deren Weiten vom Mittelpuncte, weniger als um jede gegebene Grösse vom Halbmesser unterschieden sind.

Weil beyderley gegebene Grössen, so klein als man will können angenommen werden, so sagt man es gibt Sehnen, die sich in ihren Bogen verlieren, deren Unterschied vom Bogen nähmlich kleiner ist als jede gegebene Grösse, so klein man auch eine solche Grösse annimmt. Auf solche Sehnen käme man erst durch unendlichmahl wiederhohlte Halbirungen, wenn man statt der gegebenen Grösse eine unendlich kleine annähme. Sie würden unendlich kleinen Bogen zugehören, unendlich wenig von ihren Bogen, und ihre Weite vom Mittelpuncte unendlich wenig vom Halbmesser unterschieden seyn. Das alles ist nur soviel mit andern Worten ausgedrückt: daß sich die Sehnen ihren Bogen, und ihre Entfernungen vom Mittelpuncte dem Halbmesser ohne Ende fort, nähern, und davon weniger als um jede Grösse die sich angeben läßt unterschieden werden.

3. Zus. Es gibt allemahl ein ordentliches Vieleck dessen Umfang von dem Umfange des Kreises P

weniger

weniger als um jede gegebene Grösse Z, unterschieden ist. Denn man setze ein ordentliches Vieleck von n Seiten habe die Länge L zur Seite und also n. L zum Umfange. Soll es nun das Verlangte seyn, so ist $P - n.\ L < Z$ also $\frac{1}{n} P - L < \frac{1}{n} Z$ das ist: wenn es einen Bogen $\frac{1}{n} P$ gibt, der von seiner Sehne L weniger als um $\frac{1}{n} Z$ unterschieden ist, so gibt es das Verlangte. Weil nun $\frac{1}{n} Z = m$ des 1 Zus. seyn kann, so giebt es einen solchen Bogen, und also auch das verlangte Vieleck. Nimmt man also Z für unendlich klein an, so verschwindet der Unterschied zwischen dem Umfange des Vieleckes und des Kreises, dazu n unendlich anzunehmen ist, sonst bleibt $\frac{1}{n} P$, und dessen Sehne L endlich und muß also $\frac{1}{n} Z$ folglich Z selbst endlich seyn. Dieses wird so ausgedrückt: Der Umfang eines Vielecks von unendlich viel Seiten verliert sich im Umkreise, oder man stellt sich den Umfang des Kreises als den Umfang eines solchen Vielecks vor, da denn die Theile des Kreisumfangs mit den Seiten des Vielecks zusammenfallen. Es heißt wiederum nichts weiter, als daß die Seiten eines Vielecks ihrem Bogen, und der Umfang, dem Umfange des Kreises immer näher und näher kömmt, je mehr es Seiten hat, und daß diese Näherung so weit man will gehen kann.

Diese Näherung findet nicht nur zwischen dem Umfange beyder Figuren, sondern auch zwischen ihren Flächen statt. Man ziehe in der 95. F. noch zu den vorigen Linien, an A, B, I, Tangenten, die einan-

einander in M, N, schneiden. Wenn der Bogen AIB unter 180. Gr. ist, oder der Mittelpunct E auser dem Abschnitte AIBFA liegt, so sind MAB; NBA spitzige Winkel (19. S.) und die Figur ABNM ist kleiner als ein Rechteck, das entstünde, wenn man auf AB durch A und B Perpendikel bis an die Parallele MIN zöge. Von diesem Rechtecke wäre △AIB die Hälfte (14. S. 3. Z.) also ist dieses Dreyeck grösser als die Hälfte der Figur AMNB, und folglich grösser als die Hälfte des Abschnittes, der zwischen dem Bogen AIB und seiner Sehne enthalten ist. Dieser Abschnitt aber besteht aus dem Dreyecke, und zween kleinern Abschnitten, die zwischen dem Bogen AI; IB, und ihren Sehnen enthalten sind; also betragen die beyden kleinern Abschnitte zusammen weniger als die Hälfte des grossen. Ist also AB die Seite eines ordentlichen Vielecks, z. E. des Sechseckes; so beträgt der Ueberschuß der Fläche des Kreises über die Fläche des Vieleckes, sechs der vorerwähnten grossen Abschnitte; und da die Sehnen AI, IB alsdenn Seiten des Zwölfecks sind, so beträgt der Ueberschuß des Kreises über das Zwölfeck, zwölf der kleinen Abschnitte; das ist weniger als die Hälfte des Ueberschusses des Kreises über das Sechseck. Ueberhaupt erhellet also, daß wenn der Ueberschuß des Kreises über ein Vieleck von m Seiten, v heißt; der Ueberschuß eben des Kreises über ein Vieleck von 2m Seiten $< \frac{1}{2}$ v ist; und also über ein Vieleck von 4m Seiten $< \frac{1}{4}$ v und über eines von 8m Seiten $< \frac{1}{8}$ v u. s. f.

Da

Da man also durch die Halbirung der Bogen allezeit Vielecke von noch einmahl soviel Seiten bekömmt; so läßt sich in jeden Kreis ein Vieleck beschreiben, dessen Fläche von des Kreises Fläche weniger als jede Fläche, die sich angeben läßt, z. E. als das Viereck p; unterschieden ist: denn in der Reihe v, $\frac{1}{2}$ v, $\frac{1}{4}$ v, u. s. f. kömmt man gewiß auf Unterschiede, die weniger als p betragen.

4. Zus. Der Kreis ist einem Dreyecke gleich dessen Höhe seinem Halbmesser r, die Grundlinie seinem Umfange gleich ist, oder er ist $= \frac{1}{2} P r$: Denn es sey q das Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf L (3. Zus). Ferner setze man $q = r - y$; n. $L = P - x$; so ist die Fläche des Vieleckes (nach 23. S. 10. Z.)

$$= \frac{q.\ n.\ L.}{2} = \frac{(P-x)(r-y)}{2} = \frac{Pr - rx - Py + xy}{2}$$

welches offenbahr kleiner als $\frac{1}{2} P r$ ist, weil der eine Factor kleiner als P, der andere kleiner als r ist. Da indessen x und y so klein als man will werden können, (2. 3. Zus. so kann diese Fläche dem Werthe $\frac{1}{2} P r$ so nahe als man will kommen. Folglich kann die Fläche des Kreises nicht kleiner als $\frac{1}{2} P r$ seyn: Denn wäre sie um eine Grösse die sich angeben läßt kleiner, ich will setzen sie wäre $= \frac{1}{2} P r - e$, so dürfte man nur x und y so klein machen, daß das vorhin gefundene Product von $\frac{1}{2} P r$ um was Geringers als um e unterschieden wäre, das ist möglich, weil x und y so klein als man will werden können. Alsdenn würde der Fläche des Vielecks, zu $\frac{1}{2} P r$ nicht soviel fehlen, als der Fläche des Kreises,

ses, welches ungereimt ist, da sich das Vieleck im Kreise befindet, und also keine grössere Fläche haben kann als der Kreis.

Auch kann die Fläche des Kreises nicht grösser als $\frac{1}{2}$ Pr seyn. Gesetzt sie wäre $= \frac{1}{2}$ Pr + e; die Fläche des Vielecks, kann $\frac{1}{2}$ Pr nie erreichen bis x und y gänzlich verschwinden, nie aber kann sie grösser als $\frac{1}{2}$ Pr werden; Sie bliebe also von der Kreisfläche immer um etwas unterschieden, das mehr als e betrüge. Und das wäre wieder ungereimt, weil sie ihr so nahe als man will kommen kann (3. Zus.).

Da also die Kreisfläche nicht grösser noch kleiner seyn kann als $\frac{1}{2}$ Pr, so ist sie diesem Werthe gleich.

Archimedes, der erste der ebene Flächen die mit krummen Linien begränzt werden, auszurechnen gelehrt, hat in seinem Buche von der Kreismessung diesen Satz zuerst bewiesen. Ich habe seinen Beweis hier so nachzuahmen gesucht, daß der Vortrag ohne Schaden der Gründlichkeit kürzer würde. Noch mehr pflegt man es so abzukürzen: Der Innhalt jedes ordentlichen Vielecks, ist einem Dreyecke wie 23. S. 10. Z. gleich; bekömmt nun das Vieleck unzählich viel Seiten, so wird des Dreyecks Höhe, zum Halbmesser des Kreises (2. Zus.) die Grundlinie zum Umfange des Kreises (3. Zus.) die Fläche, zur Fläche des Kreises (3. Zus.).

5. Zus. A I 66. F. sey ein unendlich kleiner Bogen, in den sich seine Sehne verliert (2. Z.) weil das Dreyeck B A I gleichschenklicht ist, so ist B A I =

R – ½ ABI (13. S. 5. Z.) aber ABI ist unendlich klein (27. S. 3. Z.) daß man also BAI = R schätzen kann: d. i. der Punct I fällt in die Tangente (19. S 1. Z.). Man kann also sagen, die Tangente habe einen unendlich kleinen Theil, ein **Element** mit dem Kreise gemein, das zwischen zween zusammengehenden Puncten des Umkreises (19. S. 4. Z.) enthalten ist.

6. Zus. Daher läßt sich der unendlich kleine Bogen AI als der Weg ansehen, den der Punct, welcher im Kreise herumgeht, in dem Augenblicke nimmt, da er in A ist. Oder der Weg dieses Punctes, seine Richtung an diesem Orte, die sich alle Augenblicke ändert (6. Erkl.) ist die Tangente.

Anm. Diese Begriffe lassen sich überhaupt auf krumme Linien erweitern. Eigentlich sagt der 6. Zus. soviel: die Richtung, welche ein Punct, der eine krumme Linie AIL beschreibt, in A hat, macht mit der Tangente AD einen kleinern Winkel, als jede andere gerade Linie, die man durch A nach der Seite, auf welcher die krumme Linie liegt, ziehen kann. Es muß sich nähmlich zwischen der Tangente und der krummen Linie keine gerade Linie durch A ziehen lassen; Weil man nun durch A gerade Linien ziehen kann, die ohne Ende fort immer kleinere und kleinere Winkel mit AD machen, so muß die Richtung, welche zwischen jeder dieser Linien und die Tangente fallen soll, von der Tangente nicht zu unterscheiden seyn.

42. Satz. Lehrs.

Wenn sich die beyden Seiten AB, AC eines Rechteckes 96. F. mit einer Linie AE = AF ausmessen

messen lassen, so steckt das Quadrat von AE in dem Rechtecke so vielmahl, so viel Einheiten das Product AC. AB enthält, wenn man die beyden Seiten als Zahlen ansieht, deren Einheit die Linie ist, die sie beyde mißt.

Bew. Der Linie AE, Quadrat AFGE; kann so vielmahl neben einander auf AB gesetzt werden, so vielmahl seine Seite in AB enthalten ist; dieses gibt also eine Reihe Quadrate, die an AB anliegt. An AC aber können so viel solche Quadrate gesetzt werden so vielmahl AF in AC enthalten ist, und also so viel Reihen Quadrate hintereinander stehen. Folglich bestimmt AB auf die erwähnte Art als eine Zahl betrachtet, die Menge der Quadrate in einer Reihe, und AC die Zahl der Reihen, also beyder Zahlen Product die Menge der Quadrate zusammen.

1. Zus. Nimmt man ein solches Quadrat als die Einheit an mit der Flächen sollen ausgemessen werden, so gibt diese Multiplication den Inhalt der Fläche, nähmlich die Menge solcher Flächeneinheiten, die in dem Rechtecke enthalten sind.

2. Zus. Wenn sich des Rechteckes MO Seiten mit eben dem Maasse messen lassen, so ist die Verhältniß beyder Rechtecke = CA. AB: PM. MN, oder aus den Verhältnissen CA: PM und AB: MN zusammengesetzt. (Ar. VI. 3.).

Anm. Eine Linie mit einer andern multipliciren, heißt eigentlich zu einer angenommenen Einheit, und den beyden

Factoren, die vierte Proportionalgrösse suchen, (Ar. V. 20.) welches also eine Linie seyn muß, und der 30. S. in Zahlen aufgelöst ist, wenn daselbst A B = 1. angenommen wird. Also drücken sich diejenigen unrichtig aus, welche sagen, aus dem Producte zwoer Linien entstehe ein Rechteck. Aber dieses Product verhält sich zu dem Producte zwoer andern Linien, die man mit eben der Einheit gemessen hat, wie sich die Rechtecke unter beyden Paaren Linien verhalten.

3. Zus. Da man alle Linien ansehen kann, als hätten sie ein gemeinschaftliches Maaß; wie im Beweise des 24. S. ist gezeigt worden, so ist gegenwärtiger Satz mit seinen Zusätzen allgemein. Gesetzt A B liesse sich genau mit A E ausmessen, aber A C mit A F = A E nicht, sondern A K wäre das Vielfache von A F das A C am nächsten kömmt, und der Rest K C wäre kleiner als A F; so ist A D grösser als die Menge der Quadrate die durch die Multiplication A K. A B angezeigt wird, und zwar um einen schmalen rechteckichten Streifen grösser dessen Grundlinie C D; die Höhe oder Breite, K C < A F ist. Weil man nun den Theil A E der A B genau mißt, so klein machen kann als man will, so kann A K der Länge A C so nahe kommen als man will, und der erwähnte Streifen so schmal werden als man will; Das Product A K. A B druckt also den Innhalt des Rechtecks der Wahrheit völlig gemäß aus, wenn des Streifens Breite K C verschwindet, und folglich ist A C. A B der Innhalt des Rechtecks, auch wenn die Höhe in Vergleichung mit der Grundlinie eine Irrationalzahl ist.

Ich

Ich habe diesen Vortrag der Ausrechnung der Rechtecke, als den leichtesten gewählt. Sonst pflegt man mit etwas veränderter Ordnung diese Lehren so zu erweisen.

Man mache $MS = AB$ und ergänze das Rechteck $PMSQ$; dieses läßt sich mit MO und mit AD, nach 24. S. 2. Z. vergleichen. Bey der Vergleichung mit MO ist die gemeinschaftliche Höhe $MS = AB$, die unterschiedenen Grundlinien sind AC, ME; Bey der Vergleichung mit AD ist die gemeinschaftliche Höhe $MS = AB$, die Grundlinien sind AC, MP; also ist

$$AD : MQ = AC : MP$$
$$MQ : MO = MS : MN$$

Folglich (Ar. VI. 1.) $AD : MO = (AC : MP) + (MS : MN)$ oder $(AC : MP) + (AB : MN)$ der letzte Theil des 2. Zus.

Also auch aus (Ar. VI. 3.) $AD : MO = AC. AB : MP. MN$ des erwähnten Zusatzes erster Theil. Dieses folgt auch vermittelst (Ar. V. 50.) aus den obigen beyden Proportionen.

Also ist auch $AD : AG = AC. AB : AE. AF$ oder $= AC. AB : AE^2$ welches der Satz selbst ist.

4. Zus. Wäre AD ein Quadrat, so käme der Inhalt heraus, wenn man die Seite mit sich selbst multiplicirte.

5. Zus. Es ist also verstattet den Inhalt, eines Rechteckes, dessen beyde Seiten a, b, heissen mö-

gen, durch ab und wenn a = b den Inhalt des Quadrates durch a^2 auszudrücken. Nähmlich wenn eines andern Rechteckes beyde Seiten p, q, heissen, so ist die Verhältniß der Flächen beyder Rechtecke ab: pq, wo a, b, p, q, mit einerley Einheit müssen gemessen werden.

6. Zus. Man kann also in der Ausübung die Seiten des Rechtecks, mit den gewöhnlichen Maassen (32. S.) messen, so zeigt das Product an, wie viel Quadrate des Maasses, das man gebraucht hat, im Rechtecke enthalten sind. Z. E. Es sey AB = 6′; AC = 5′ so ist AD = 6. 5 = 30. Quadrate eines Fusses; oder Quadratfuß; Kreutzfuß, gevierte Fuß.

7. Zus. Eigentlich muß man also beyde Seiten mit einerley Maasse messen; Wäre die eine = 7′ die andere 5′ 4″ so müßte man die erste auch in Zollen ausdrücken, um die Menge von Quadratzollen zu bekommen, welche den Innhalt gäbe. Braucht man nun Decimalmaaß, so wäre sie = 70″ und der Innhalt = 54. 70 = 3780. Quadratzolle. Wäre aber zwölftheiliges Maaß gebraucht worden, so müßte man 7′ = 7. 12″ = 84″ und 5′ 4″ = 5. 12″ + 4″ = 64″ mit einander multipliciren, welches die vorzügliche Bequemlichkeit des zehntheiligen weiset.

8. Zus. Die Frage zu entscheiden, wie viel Quadrate vom niedrigen Maasse ein höheres enthält, und umgekehrt, dient folgende Betrachtung: Wenn AB = AC = 10. AE wäre, so enthielte AD 100. Quadrate;

drate; nähmlich 10. in einer Reihe, und 10. Reihen. Nun sey AB = AC = 1° zehntheilichtes Maaß, so ist AD eine gevierte Ruthe, die also hundert gevierte Fuß enthält. Aus eben dem Grunde enthält der gevierte Fuß oder Zoll, hundert gevierte Zoll oder Linien. Folglich sind 12436728''' in Quadratmaasse = 12° 43' 67'' 28''' und umgekehrt 7° = 700' = 70000'' = 7000000'''.

Anm. Hieraus wird erhellen, wie nach den Regeln der Rechnung mit den zehntheilichen Brüchen hier verfahren werden kann, ohne alle Maasse nach dem 1. Zus. auf das niedrigste zu bringen. Z. E. wenn die beyden Seiten 7° 2' und 3° 2' 4'' sind, so nehme man die Ruthe für die Einheit an, und der Inhalt wird (nach Arithm. III. 2. 9.) = 7, 2. 3, 24 = 23, 328 = 23 Quad:. R. 32' 80''.

9. Zus. Hätte man zwölftheilichtes Maaß gebraucht, so hielte die Quadratruthe 144 gevierte Schuh; und der gevierte Schuh oder Zoll, auch soviel gevierte Zoll oder Linien. Also bringt man hier die höheren Maasse auf niedrigere durch die Multiplication, und die niedrigere auf höhere durch die Division mit 144. Z. E. 7° = 7. 144' = 908', und 438927'' = 3048' 15'' = 21° 24' 15''. So hält bey sechszehntheilichen Maasse, die gevierte Ruthe 16. 16 = 256 gevierte Fuß u. s. w.

10. Zus. Im 15. S. 60. F. ist BC = r (AB² + AC²) oder wenn man AB, AC, mit einerley Maasse gemessen hat, so hält BC von diesem Maasse so viel, als die Wurzel aus der Summe der Quadrate anzeigt.

11. Zus. Ist also diese Wurzel irrational, (Ar. IIII. 26.) so hat die Hypothenuse mit den Seiten kein gemeinschaftliches Maaß. Der einfachste Fall hievon ist, wenn die Seiten gleich sind, da jede = 1 gesetzt werden kann; und also die Hypothenuse = $\sqrt{2}$. Es gibt also Linien, die Irrationalverhältnisse haben, und Irrationalzahlen lassen sich durch Linien ausdrücken, z. E. im angeführten Exempel ist die Hypothenuse vollkommen richtig = $\sqrt{2}$. Die Geometrie leistet hier etwas dadurch, daß sie das Ganze auf einmahl darstellt, oder seine Gränzen bestimmt, dazu die Arithmetik unvermögend war, welche die Theile des Ganzen nach und nach suchte, und sie also nie alle fand, wenn ihre Menge unendlich war.

12. Zus. Im 31. S. ist $BD^2 = AB.BC$ (Ar. V. 31.) oder $BD = \sqrt{AB.BC}$; welches einen neuen Weg gibt alle Irrationalzahlen durch Linien darzustellen; wenn man AB = 1 und BC = 2, = 3, = 5, u. s. f. setzt, daß BD die Wurzel aus 2, 3, 5, u. s. w. wird.

13. Zus. Ein schiefes Parallelogramm EBCF (55. F.) auszurechnen, lasse man, von welchem Puncte einer Seite man will, ein Loth EG auf die gegenüberstehende fallen, so ist der Innhalt = EG. BC; denn der Innhalt ist einem Rechtecke BADC über eben der Gründlinie BC gleich, (14. S.) und die senkrechte Seite dieses Rechtecks AB ist = EG.

14. Zus.

14. Zus. Wenn die beyden Linien AB, BC, senkrecht auf einander stehen, und das ihnen zugehörige Rechteck ADCB ergänzt wird; so hat solches einen grössern Inhalt, als wenn man ein Parallelogramm mit schiefen Winkeln macht, das eben die Seiten hätte: Nähmlich eine Linie = AB schief auf BC gesetzt, würde sich unter EF endigen.

15. Zus. Der Innhalt eines Dreyecks 56. F. kömmt heraus, wenn man das Product aus seiner Höhe Aa in die Grundlinie CD halbiret. (14. S. 3. Zus.) Er ist also $\frac{Aa.\ CD}{2}$ oder $\frac{1}{2}$. Aa. CD oder $\frac{1}{2}$ CD. Aa.

16. Zus. Jedes Vieleck wie ABCDE 93. F. läßt sich durch Diagonalen in Dreyecke zergliedern, die man also nach 15. Zus. einzeln ausrechnen, und zusammen addiren kann; zur Verkürzung der Arbeit muß man allezeit die Seite, die zweyen Dreyecken gemein ist, für ihre gemeinschaftliche Grundlinie annehmen, und darauf die Höhen von den gegenüberstehenden Winkeln fällen; z. E. in den Dreyecken AED, ADB, auf AD, von E und B.

17. Zus. Ein ordentliches Vieleck 77. F. ist = $\frac{1}{2}$ KQ. (AB + BC... + FA) (23. S. 10. Zus.) = KQ. $\frac{m}{2}$. AB wenn die Zahl der Seiten m ist.

Anm. Für jedes ordentliche Vieleck, ist die Verhältniß von KQ und AB gegen einander, und gegen den Halbmesser des Kreises, bestimmt. Das erste erhellet daraus, weil KQ = r (AKq -- AQq) (15. S.) aber AQ = $\frac{1}{2}$ AB (17. S.) also AQq = $\frac{1}{4}$ ABq (12. S. 11. Z.)

also $KQ = r\,(AKq - \frac{1}{4} ABq)$ die allgemeine Bestimmung der Seite von jedem ordentlichen Vielecke, durch den Halbmesser, läßt sich hier nicht lehren, in der Trigonometrie aber wird davon geredet werden. Zum Exempel kann hier das Sechseck dienen. Es sey $AK = 1 = AB$; so ist $AQ = \frac{1}{2} = 0,5$ und $KQ = r\,(1 - 0,25) = r\,0,75 = 0,8660$; also der Inhalt des Sechseckes $= 3.0,8660 = 2,5980$; d.i. in dem Inhalte des Sechseckes steckt das Quadrat des Halbmessers $= 1$, zweymahl, und noch $\frac{598}{1000}$ dieses Quadrats. Wäre also der Halbmesser $= 1°$ so hielte das Sechseck $2° 59' 80''$ Quadratmaaß (8. Zus.).

18. Zus. Ein Trapezium ABCD 97. F. von dem zwo Seiten AD, BC, gleichlaufend sind auszurechnen; theile man es durch BD in zwey Dreyecke; so ist $\Delta ABD = BE \frac{1}{2} AD$; und $\Delta BCD = DF \frac{1}{2} BC$, wenn BE, DF, Perpendikel auf die beyden gegenüberstehende Seiten AD, BC, sind; Aber diese Perpendikel sind gleich (12. S. 2. Zus.) also ist die Summe beyder Dreyecke oder das Trapezium $= \frac{BE.(AD+BC)}{2}$.

19. Zus. Eine Figur ABCDEfb 98. F. noch bequemer als nach dem 16. Zus. auszurechnen, ziehe man durch sie nach Gefallen eine Linie etwa durch zweene Winkel AE, und setze auf solche durch alle Winkel der Figur Perpendikel Bb, Cc, Dd, u. s. f. so geben sich an den Enden Dreyecke, wie ABb, in der Mitten aber Trapezia BbCc die man bequem ausrechnen kann, weil man nur den Abstand der beyden Seiten Bb, Cc, auf AE zu messen, und

mit

mit $\frac{1}{2}$. (Bb + Cc) zu multipliciren braucht, also der Mühe, viel Perpendikel zu ziehen, (16. Z.) überhoben ist, da sich die Perpendikel auf AE, als Parallellinien durch verschiedene Handgriffe geschwinde ziehen lassen. Die Trapezia addirt man nach diesem zusammen.

Ex. Es sey die Einheit ein Fuß und die Stücken der Linie AE die zwischen A und Bb; zwischen Bb und Cc, zwischen Cc und Ff, zwischen Ff und Mm, fallen, seyn nach dieser Ordnung, 7; 2; 3; 5; Ferner sey Bb = 4; Cc = 5; Ff = 6; Mm = 9; so ist △ ABb = 7. 2 = 14

$$BbCc = \frac{4+5}{2} \cdot 2 = 9$$

$$CcfF = \frac{5+6}{2} \cdot 3 = \frac{11.3}{2} = 16,5$$

$$fFmM = \frac{6+9}{2} \cdot 5 = = 37,5$$

das Stück ABCFMmfcbA = 77

20. Zus. Gibt es unter den Gränzen der Figur krumme Linien wie fmdnE, so nehme man darauf Puncte f, m, d, n, so nahe beysammen, daß die Krümmung unmerklich wird, welches hier allezeit kann angenommen werden, da nur von der Ausübung und dem, was in die Sinne fällt, die Rede ist.

1. Anm. So läßt sich ein Feld, das in Grund gelegt ist (40. S.) ausrechnen. Dieses Verfahren hat Philipp. Naudaeus Misc. Berol. Contin. II. p. 250. seqq. erläutert.

tert. Man könnte es auch wohl mit dienlichen Werkzeugen auf dem Felde selbst vornehmen. Sonst aber läßt sich ein Feld, ohne daß man eine Zeichnung davon machen darf, durch die Zerlegung in Dreyecke (16. Zus.) ausrechnen, wenn man die Seiten und die Diagonalen alle gemessen hat, und den Inhalt eines Dreyecks aus seinen drey Seiten zu berechnen weiß, welche Regel sich durch die Algebra leicht finden läßt, und in der ausübenden Geometrie von grossen Nutzen ist. Man s. unten die Trigonometrie 21. Satz.

2. Anm. Weil man alle Figuren durch Quadrate ausrechnen, (42. S.) und in Quadrate verwandeln kann, (14: S. 7. Z und 31. S. und 42. S. 12. Z.) so nennt man die Erfindung des Inhalts einer Fläche ihre Quadratur. Besonders ist dieser Nahme vom Kreise, und krummlinichten Flächen gewöhnlich.

21. Zus. Aehnliche Dreyecke A B C; a b c; 45. F. verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten. Denn man ziehe ihre Höhen B D; b d; so ist $\triangle$ A B C : $\triangle$ a b c = B D. A C : b d. a c (15. Z.) aber $\triangle$ A B D $\sim$ $\triangle$ a b d; (26. S.) also B D : b d = A B : a b Ferner A B : a b = A C : a c also B D : b d = A C : a c oder $BD = \frac{bd.AC}{ac}$ (Ar. V. 35.) folglich $\triangle$ A B C : $\triangle abc = \frac{bd.AC}{ac}$. A C : b d. a c = A C. A C : a c. a c oder wie die Quadrate der Seiten A C; a c; aber weil A C : a c = A B : a b = B C : b c so ist (aus Ar. V. 50.) die Verhältniß der Dreyecke, mit der Verhältniß der Quadrate jeder zwo ähnlichliegenden Seiten einerley. (Triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum). (Ar. VI. 7.)

22. Zus.

22. Zus. Aehnliche Figuren, verhalten sich wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten. Sie lassen sich (39. S. 1. Zus. 93. F.) in ähnliche Dreyecke theilen. Also ist

$$\triangle AED : \triangle aed = AEq : aeq$$
$$\triangle ADB : \triangle adb = ABq : abq$$
$$\triangle BDC : \triangle bdc = BCq : bcq$$

Da nun die Verhältnisse der Seiten der Figuren wegen ihrer Aehnlichkeit einerley sind; und auch die Verhältnisse der Quadrate dieser Seiten wegen Ar. V. 50. einerley sind; so sind die Verhältnisse aller dieser Dreyecke einerley, oder es ist

$\triangle AED : \triangle aed = \triangle ADB : \triangle adb = \triangle BDC : \triangle bdc$

also die Summe aller vorhergehenden Glieder zu der Summe aller folgenden $= \triangle AED : \triangle aed$ (Ar. V. 34.) $= AEq : aeq$; aber die Summe aller vorhergehenden ist die eine Figur, und die Summe aller folgenden die andere; also $ABCDE : abcde = AEq : aeq$; wo man aus der schon angegebenen Ursache, statt der letzten Verhältniß die Verhältniß der Quadrate von jeden zwo andern ähnlichliegenden Seiten nehmen kann.

23. Zus. Linien, die in zwo ähnlichen Figuren auf ähnliche Art bestimmt werden, verhalten sich wie die ähnlichliegende Seiten; z. E. $DB : db = BA : ba$ 93. F. oder $fc : FC = cd : CD$ 92. F. also verhalten sich ähnliche Figuren auch wie die Quadrate solcher Linien, die in ihnen auf ähnliche Art bestimmt oder gezogen werden, wenn es gleich nicht Seiten sind.

So

So verhalten sich ähnliche Dreyecke 45. F. wie die Quadrate ihrer Höhen.

24. Zus. Wenn von einem Dreyecke ACD 56. F. der Innhalt und die Grundlinie gegeben wird, so kann man die Höhe finden. Es sey der Innhalt $= p$ so ist $\frac{A a . CD}{2} = p$ (15. Zus.) also $A a = 2p : CD$. Dieses bestimmt aber nicht ein gewisses Dreyeck, sondern nur eine gerade Linie AE in welcher die Spitzen aller Dreyecke liegen, welche die gegebene Grundlinie, und den gegebenen Innhalt haben; (14. S. 2. Z.) einen Ort (locum geometricum) dieser Spitzen. Dieß ist also ein Beyspiel einer unbestimmten Aufgabe, (problema indeterminatum) die nicht eine, oder etliche Auflösungen von bestimmter Anzahl, sondern unzählich viel zuläßt.

25. Zus. Dieses dient zur Theilung der Figuren. Wenn man eine Figur 99. F. in eine Menge gleicher Theile theilen soll, so rechne man sie erstlich aus; (16. Z.) und dividire den gefundenen Innhalt mit der Zahl der Theile. Den Quotienten vergleiche man mit dem äußersten Dreyecke der Figur, ABE; gesetzt dieses sey kleiner, so ziehe man es von dem Quotienten ab, und sehe den Unterschied, als den Innhalt eines Dreyecks an, dessen Grundlinie BE ist. Man finde also seine Höhe LM (24. Z.). In dieser Weite ziehe man mit BE eine Parallele, wo solche, wie bey N in eine Seite der Figur einschneidet, da

fällt

fällt die Spitze des gesuchten Dreyecks BNE hin. Gibt es noch einen Einschnitt wie bey O, so könnte das Dreyeck auch BOE seyn, daher man die bequemste Lage wählen kann.

Exempel. Die Figur halte 12867□' und soll halbirt werden. So ist ihre Hälfte 643350□''

Es sey Δ ABE = 527300

Inhalt des gesuchten Dreyecks = 16050□''

Es sey eine Grundlinie BE = 7200'

so ist $\frac{116050.2}{7200} = \frac{116050}{3600} = 32'' \frac{17}{72} = LM$

also $\Delta BNE = \frac{LM.BE}{2} = 116050$□''

So wäre ABNE die eine Hälfte der Figur, NEDC die andere. Sollte man mehr Theile machen, so müßte das folgende Stücke eben so wie das erste gefunden werden.

Anm. Die Theilung der Figuren läßt sich der mancherley Gestalten wegen, die vorkommen, nicht wohl in allgemeine Regeln einschliessen. Auch werden öfters Umstände vorgeschrieben, deren Erfüllung einige Scharfsinnigkeit in Anwendung der bisherigen Lehren erfodert. Ein leichtes Beyspiel hievon ist 100. F. Ein Parallelogramm so zu halbiren, daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct E in der Seite DC gehet. Hier nehme man nur BF = DE, und ziehe EF. Der Beweis fließt leicht aus 18 Z. EQ sey die Weite der Seiten DC; AB, so ist Trapez DEFA = $\frac{1}{2}$ EQ. (DE + AF); aber AF = AB -- BF = DC -- DE aber weil DC = AB und

ver-

vermöge der Verzeichnung DE = BF, so ist AF = EC oder DE + AF = BF + EC, welches letztere mit eben der ½ EQ multipliciret = Trap. EFBC. Etwas schwerere Fälle kommen in Schriftstellern von der practischen Geometrie, als beym Schwenter I. Tract. 7. B. und beym Ozanam de la division des champs vor. Hr. Pr. Lowitz hat in einer in der Kön. Gött. Ges. der W. im November 1757. gehaltenen Vorlesung gewiesen, wie man dergleichen Theilungen auf dem Felde unmittelbar blos mit der Meßkette ohne Werkzeuge und Zeichnungen verrichten soll, welches zur Richtigkeit der Arbeit sehr dienlich ist, und sich durch algebraische Formeln bewerkstelligen läßt.

43. Satz. Aufgabe.

Wenn der Halbmesser EA 63. F. und die Seite AB eines ordentlichen Vielecks gegeben sind, die Seite des Vielecks, das noch einmahl so viel Seiten hat, AI zu finden.

Auflös. $EF = r\,(EAq - AFq)$ (15. S.) ist gegeben, da $AFq = \frac{1}{4} ABq$; Wenn man also EF von $EI = EA$ abzieht, so ist FI gegeben; und folglich $AI = r\,(AFq + FIq)$.

Es sey $EA = r$, $AB = f$ so ist $EFq = r^2 - \frac{1}{4} f^2$; und $FI = r - EF$; also $AIq = \frac{1}{4} f^2 + (r - EF)^2 = \frac{1}{4} f^2 + r^2 - 2r.\ EF + EF^2 = \frac{1}{4} f^2 + r^2 - 2r.\ EF + r^2 - \frac{1}{4} f^2$ folglich $AI = r\,(2r^2 - 2r.\ EF)$.

Exempel. Wenn (23. S. 6. Z.) $f = r = 1$ so ist $EFq = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ also $EF = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (Ar. I. 77.)

folglich

folglich die Seite des Zwölfecks $= r\ (2 - r\ 3)$
Nun ist $r\ 3 = 1,732051$ (Ar. IIII. 27.) also die Seite des Zwölfecks $= r\ 0,267949 = 0,517$. Wollte man sie in noch kleinern Theilen des Halbmessers haben, so müßte man $r\ 3$ weiter ausgezogen haben, so würde sie genauer 0,51764.

1. Zus. Wenn f die Seite eines Vielecks von n Seiten gewesen ist, und man also daraus die Seite des Vielecks von 2n Seiten gefunden hat, so setze man nun diese in dem Ausdrucke $r\ (2r^2 - 2r.EF)$ wo $EF = r\ (r^2 - \frac{1}{2} f^2)$ an die Stelle von f; so findet man aus ihr die Seite des Vielecks von 4n Seiten, und diese statt f gebraucht, gibt die Seite des Vielecks von 8n Seiten, und so kann man ohne Ende fortgehen.

So findet sich aus dem Zwölfecke das 24 Eck: aus diesem das 48 Eck u. s. w.

2. Zus. Je kleiner f ist, desto weniger ist EF von r unterschieden. Man kann aber nach diesem Satze allezeit ein f finden, das kleiner ist als jede gegebene Länge, und folglich ein Vieleck, für welches EF weniger von r unterschieden ist, als jeder gegebene Unterschied beträgt.

Ex. So sey für das Zwölfeck $f = 0,517$ und $\frac{1}{2} f = 0,2585$ und $\frac{1}{4} f^2 = 0,06682225$ also $1 - \frac{1}{4} f^2 = 0,93317775$ daraus die Wurzel gezogen, das Perpendikel des Zwölfecks $= 0,966$ gibt. Es ist aber etwas zu groß, weil man f zu klein angenommen. Genauer ist es 0,96592.

3. Zus. Die Seiten (1. Z.) werden (41. S.) Sehnen, die ihren Bogen immer näher kommen. Wenn also g, h, i, k, die Seiten der Vielecke von n, 2n, 4n, 8n, Seiten sind; so ist 2n. h weniger von dem Umfange des Kreises unterschieden als n. g und 4n. i weniger als 2n. h; und 8n. k weniger als 4n. i und so geht diese Näherung ohne Ende fort, daß man allemahl ein Vieleck finden kann, dessen Umfang von dem Umfange des Kreises weniger unterschieden ist, als jede gegebene Grösse (41. S. 1. Z.). Ein Vieleck von sehr vielen Seiten wird also dem Umfange des Kreises sehr nahe kommen, und eines von mehr Seiten noch näher, u. s. w. daß man also hier einen Weg siehet, wie der Umfang des Kreises durch eine Näherung ausgedruckt werden kann.

Anm. In der That ist dieser Weg ungemein mühsam und weitläuftig, weil man immer Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln u. s. w. ausziehen muß. Christian Huygens in s. Schrift de circuli magnitudine inuenta, (Leid. 1654.) hat ihn abzukürzen gesucht, und gewiesen, wie man mit Vielecken von wenigen Seiten den Umfang des Kreises so genau bestimmen kann, als sonst mit welchen von mehr Seiten. Vor Bekanntmachung dieses Vortheils aber hat schon Ludolph von Cöln den Umfang des Kreises sehr genau gesucht und gefunden, daß wenn der Durchmesser = gesetzt wird, der Umfang grösser ist als 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50 aber kleiner als diese Zahl, wenn die letzte Zifer in 1 verwandelt wird. (Arithmetische en Geom. fondamenten 163. Seite. Leid. 1616. Man s. auch sein Buch de circulo & adscriptis c. 10. Leid. 1619.). Die Rechnung des Unendlichen lehret den Umfang des Kreises bequemer und noch genauer finden, ausser dem aber, daß

ihre Gründe hier nicht können vorausgesetzt werden, so beruhen selbige selbst auf den gegenwärtigen Betrachtungen. Am weitesten hat Lagny durch Kunstgriffe, die Euler Comm. Petrop. T. VIII. p. 223. noch verborgen nennt, den Umfang gesucht, nähmlich auf 127. Decimalstellen. Zur Ausübung braucht man sie nie so weit, als Ludolph von Cölln sie gefunden hat. Man nimmt von seinen Zifern insgemein nur die ersten. Z. E. die 3,14 setzen zum Voraus, daß man den Umfang nur bis auf Hundertstheile des Durchmessers suche; also nimmt man an, der Umfang sey 314 wenn der Durchmesser 100 ist, und wirft kleinre Theile des Durchmessers weg. In diesem Verstande sagt man, der Durchmesser verhalte sich zum Umfange wie 100: 314. welche Verhältniß am gemeinsten ist. Will man auch Tausendtheile in Betrachtung ziehen, so wird die Verhältniß = 1000: 3141, für Zehntausendtheile 10000: 31415. für Hunderttausendtheile 314159. u. s. w. Man kann also den Umfang so scharf ausdrucken als es eine gewisse Absicht bey der Ausübung erfodert. Man braucht zuweilen auch des Metius Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise 113: 355. welche so viel als 1: 3, 1415929.... folglich auf sechs Decimalstellen richtig ist.

44. Satz. Aufgabe.

Wenn der Durchmesser eines Kreises (=d) gegeben ist; seinen Umfang (=p) und seinen Inhalt (=a) zu finden.

Auflös. Man nehme von den Zahlen der Anm. des 43. S. so viel als die vorgesetzte Schärfe erfordert; und suche nach der Regel Detri den Umfang. Dieser mit dem halben Halbmesser, oder des Durchmessers vierten Theile multiplicirt, gibt den Innhalt (41. S. 4. Z. und 42. S. 15. Z.). Oder wenn statt

der Verhältniß der Anm. des 43. S. überhaupt 1 : P gesetzt wird, so ist des Kreises der d zum Durchmesser hat, sein Umfang $p = d.P$ und sein Innhalt $a = P.d.\frac{d}{4} = \frac{P.d^2}{4}$ oder wenn sein Halbmesser $r = \frac{1}{2}d$, so ist $1 : P = 2r : p$ und $p = 2r.P$, und $a = 2r.P.\frac{1}{2}r = r^2 P$. Wo man P so weit als nöthig mit Zahlen ausdrucken kann.

In der Folge kann man auch nachstehende Zahlen brauchen: $\frac{1}{2}P = 1,5707963267948966$

$\frac{1}{4}P = 0,7853981633974483$

Exempel. Wenn des ehernen Meeres Oberfläche ein Kreis gewesen ist, und sein Durchmesser $d = 10$ Ellen, so ist sein Umfang $3,14159.10 = 31,4159$ Ellen. Die Fläche aber $= 3,14159.\frac{100}{4} = \frac{314,159}{4} = 78,539$ Quadratellen.

Anm. Dieser Unterschied von dem Maasse, das die Schrift angiebt, rührt ohne Zweifel daher, weil das eherne Meer keinen kreisförmigen Umfang gehabt hat. Man darf ihm nur die Gestalt eines Sechsecks geben, so kömmt das Maas der Schrift vollkommen heraus. S. Wideb. Math. Bibl. Spec. IIII. Qu. XI. Schmidt Bibl. Math. 160. Nicolai de Symmetria maris aenaei. disp. I. II. Vit. 1717. praef. Clausing.

1. Zus. Wenn eines andern Kreises Durchmesser δ, Umfang π, Innhalt α ist, so ist $\pi = P\delta$ und $\alpha = \frac{\pi\delta}{4} = \frac{P\delta^2}{4}$: also $p : \pi = d : \delta$ und $a : \alpha = d^2 : \delta^2$ d. i. zweener Kreise Umfänge verhalten sich

sich wie die Durchmesser; und ihre Flächen wie die Quadrate der Durchmesser. Kreise sind nähmlich ähnliche Figuren, daß dieses aus 42. S. 23. Z. folgt.

2. Zus. Die Summe zweener Kreise ist $a + \alpha = \frac{P d^2}{4} + \frac{P \delta^2}{4} = \frac{1}{4} P. (d^2 + \delta^2) =$ einem Kreise, von dem der Durchmesser $= r (d^2 + \delta^2)$. Wenn also (60 F.) $AB = d$, $AC = \delta$ so ist ein Kreis über BC so groß als die beyden Kreise über AB, AC, zusammen (15. S.). Imgleichen ein Kreis über AC so groß als ein Kreis über BC weniger einem über AB.

Anm. Dieses gilt wegen 42. S. 22. Z. von drey ähnlichen Figuren über AB, AC, BC.

3. Zus. Es ist also $d^2 . \frac{1}{4} P$ oder $a = d^2 .$ 0, 785 398 163 397 44. Dieses gibt die Verhältniß des Innhalts zum Quadrate des Durchmessers; es ist nähmlich

$a : d^2 =$ 0, 785 : 1 = 785 : 1000 oder = 0, 7853 : 1 = 7853 : 10000 u. s. w.

4. Zus. Dieses dient, den Innhalt eines Kreises aus dem Durchmesser zu berechnen, ohne daß man erst den Umfang suchet.

Exempel. Es sey eines Kreises Durchmesser = 1000′ = d so ist sein Innhalt a = 1000000. 0, 785398 = 785398 Quadratfuß.

5. Zus. Ist der Umfang p gegeben, so findet man den Durchmesser $d = \frac{p}{P} = \frac{P}{3,14159...}$ Es ist aber $\frac{1}{p} = 0,318309886183790671 53$ (welche Rechnung der geschickte Lehrer der Mathematik zu Schulpforte Hr. Hübsch Arithmet. Portens. III. Th. 116. §. mitgetheilet hat. Die letzte Zifer sollte beynahe 4 seyn). Also findet man gleich den Durchmesser $d = p. 0,318309886...$ und $\frac{1}{4} d = p. 0,079577471545947.$

Exempel. Wenn man dem Umfange des Aequators 5400 Meilen gibt, so ist sein Durchmesser $= 5400. 0,3183 = 1718,82$ Meilen.

6. Zus. Suchte man eines Kreises Durchmesser aus seinem Innhalte, so wäre $d^2 = \frac{4a}{P} = 4a. 0,$ 3183... daraus man also die Quadratwurzel zieht um d zu bekommen.

Exempel. Wie groß ist eines Kreises Durchmesser, wenn seine Fläche gleich $1 \square c = 100' = 10000'' = a$; Hier ist $d^2 = 4. 3183,0988618379 = 12732,$ 3954... woraus $d = 1° 1' 2'', 83$ gefunden wird.

7. Zus. Soll man den Ausschnitt eines Kreises wie FKD 76 F. berechnen, da der Winkel FKD gegeben ist, so suche man den Umfang $= p$ und sage (22. S. 7. Z.) $360° : FKD = p : DF$; so hat man DF in Längenmaasse, damit der Durchmesser ist gemessen worden; welches alsdenn mit $\frac{1}{4} d$ multiplicirt

cirt

eirt des Ausschnitts Innhalt gibt. Denn es verhält sich offenbahr der Innhalt des Ausschnittes zur Kreisfläche wie sein Bogen FD zum Umfange; welches erhellt, wenn man sich den Umfang in Theile getheilt vorstellt, die den Bogen des Ausschnittes zugleich messen, da denn so viel kleine Ausschnitte EKD auf FKD gehen, so viel Bogen ED auf DF gehen; und so viel kleine Ausschnitte EKD auf den ganzen Kreis, so viel Bogen ED auf den ganzen Umfang (Man s. den 22. S.).

Exempel. In einem Kreise, dessen Durchmesser $= 8'$ sucht man den Ausschnitt von 50°. Man nehme $\frac{1}{2}p = 3,14.4' = 12',56$ und sage $180:50 = 12'.56 : 3',48$ welche letztere Zahl die Länge der Bogens DF ist. Folglich ist des Ausschnitts Innhalt $= 3',48.2' = 6,96$. Hätte man $P = 0,3141\,59$ angenommen, so wäre der Bogen $3',49065$ und des Ausschnittes Innhalt 6,98130 gekommen; woraus erhellet, daß, die Grössen genau zu berechnen, P, in viel Zifern muß ausgedruckt werden.

8. Zus. Den Abschnitt zwischen dem Bogen AIB und seiner Sehne AB 95 f. zu berechnen, sucht man erstlich den Innhalt des Ausschnittes zwischen dem Bogen AIB und den Halbmesser AE, BE; (7. Z.) davon ziehe man das Dreyeck AEB ab.

Man muß also AE, AB, EF, wissen; sind die ersten beyden gegeben, so findet sich $EF = r$ (AEq − $\frac{1}{4}$ABq). Wären aber AB und die Höhe des Abschnittes FI gegeben, so fände sich der Rest des Durch-

messers FD = FAq : FI (31. S.) daraus man also den Halbmesser finden, damit den Kreis beschreiben und den Abschnitt berechnen kann.

Exempel. FI = 7′ AB = 12′; FD = $\frac{36}{7}$ = 5′, 1428 folglich FI + FD = ID = 12′, 1428; davon die Hälfte IE = 6′, 0714. Der Mittelpunct fällt also zwischen F und I; und der Bogen AIB wird über 180°; Wenn man nun mit dem Halbmesser 6, 07 den Kreis beschreibt, und darin die Sehne 12 trägt, so kann man mit dem Transporteur den Winkel AEB finden, der hier > 2 R seyn und zu seiner Maasse den Bogen ADB haben wird, welcher, von 360° abgezogen, den Bogen AIB läßt. Der Bogen ADB wird 162 Gr. 26 M. und AIB = 197 Gr. 34 M. gefunden werden. Das Dreyeck AEB ist = EF. $\frac{1}{2}$ AB und hier EF = FI — EI = 1, 0714.

9. Zus. Wenn der Umfang eines Quadrates = p also seine Seite $\frac{1}{4}$ p ist; so verhält sich sein Innhalt zum Innhalte des Kreises = $\frac{1}{16}$ p^2 : $\frac{1}{4}$ pd = $\frac{1}{4}$ p : d = a : d^2 (3. Zus.).

1. Anm. Unter allen Figuren, die gleichen Umfang haben, hat der Kreis die gröste Fläche. Unter Figuren von gleichem Umfange hat die ordentliche mehr Fläche als die unordentliche, ja selbst die mehr, welche der ordentlichen näher kömmt (S. ein Exempel 42. S. 14. Z.) und die ordentliche von einer grössern Anzahl Seiten mehr als die von einer geringern. Die Beweise giebt Pappus Collect. Math. L. V. und nach ihm Clauius Geom. Pract. Lib. VII. und Comm. in Sphaer. Io. de Sacrobosco cap. I.

2. Anm.

2. Anm. Man kann also Fragen, wo es auf die Flächen der Figuren ankömmt, gar nicht aus ihrem Umfange entscheiden. Dieser kann wie im 14. S. ohne Ende wachsen, wenn jene ungeändert bleibt. Man s. ein Exempel dieses Irrthums das eine hauswirthliche Regel seyn soll, in Beyers Markscheidekunst 214. Seite.

3. Anm. Die Quadratur des Kreises (42. S. 20. Z. 2. Anm.) ist ungemein viel schärfer entdeckt, als man zu allem Gebrauche in der Ausübung verlangen kann. In der Theorie könnte man noch suchen, ob sich die Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser nicht durch ein paar bestimmte Zahlen vollkommen darstellen liesse. Vermuthlich ist diese Verhältniß irrational. Ich sage vermuthlich, denn Sturms Beweis davon Mathes. Enucl. L. 1. §. 2. Prop. 43. ist noch einigem Zweifel unterworfen. Drückte man nun also gleich diese Verhältniß durch Irrational-Zahlen aus, so nützte man doch daraus zum Gebrauche eben die Näherungen herleiten, die man schon hat. Man wird also urtheilen, wie viel Einsicht diejenigen besitzen, welche die Quadratur des Kreises in der Einbildung suchen, sie würden dadurch grosse Vortheile für die ausübende Mathematik erfinden, und wohl gar eine Belohnung verdienen. In der höhern Mathematik verstehet man unter der unbestimmten Quadratur des Kreises noch etwas anders, dessen Unmöglichkeit erwiesen ist, welches man von der nur erwähnten doch nicht sagen kann. Das sicherste Mittel, solche angebliche Quadraturen zu prüfen, ist, zu sehen, ob sie mit Ludolps v. Cöln Verhältniß übereinstimmen. Da diese Verhältniß als eine Näherung erwiesen ist, so hat man das Recht, jede andere, die sich nicht mit ihr vergleichen läßt, ohne weitere Untersuchung für falsch zu erklären. Denn es finden sich noch immer von Zeit zu Zeit Leute, die die Quadratur des Kreises wollen gefunden haben, ohne zu wissen was sie damit gefunden hätten. So ward im Mercure de France May 1762. gemeldet, "daß einer nach mehr als 25 jährigem Fleisse herausgebracht hätte der Durchmesser könnte

sich wohl zum Umfange verhalten wie 23099: 725 76,, das wäre wie 1 : 3, 1419.. und weil sich diese beyden Dinge nicht so verhalten können, so hat der gute Mann seine mehr als 25. Jahr sehr übel angewandt.

10. Zus. Der Innhalt des Ringes zwischen den beyden Kreisen um einen Mittelpunct K 68 F. findet sich so: Es sey KP = r, KQ = R, so ist der Umfang des einen Kreises = 2 r. P und sein Innhalt = r^2 P; des äusern Innhalt = R^2. P und der Ring als beyder Unterschied = ($R^2 - r^2$). P; der Ausschnitt aus dem Ringe NPOQ wird sich zum ganzen verhalten wie NKQ : 360°.

11. Zus. Wenn der beyden Kreise 76. F. ihre Halbmesser r, R, ihre Umkreise p, P, heissen, so ist GKD : 360 Gr. = DG : P und 360 Gr: fKd = p : df (22. S. 5. Z.) folglich GKD : fKd = DG. p : df. P. aber $p = \frac{r.P}{R}$ also GKD : fKd = $\frac{DG.r.P}{R} : df.P = \frac{DG}{R} : \frac{df}{r}$; Oder die Verhältniß der Winkel ist aus der ordentlichen der Bogen, mit denen man sie mißt, und der verkehrten der Halbmesser zusammengesetzt. Sind also die Winkel gleich, so verhalten sich die Bogen wie die Halbmesser.

Der

Der Geometrie zweyter Theil.

Von den Lagen der Flächen, und den Körpern.

Erklärungen.

1. Eine Linie AB 101. F. steht auf einer Ebene FGHI senkrecht (recta est plano) wenn sie mit allen Linien BC, BD, BE, u. s. f. rechte Winkel macht, welche in dieser Ebene durch den Ort, wo sie in die Ebene eintrifft, gezogen werden.

Die Neigung einer Linie AC gegen eine Ebene FGHI oder ihr Winkel mit der Ebene, ist der Winkel, den sie mit einer andern Linie macht, die in der Ebene durch den Ort C wo sie in die Ebene eintrifft, nach dem Orte B gezogen wird, wo ein Perpendikel von einem willkührlichen Puncte der Linie AC, auf die Ebene herabgelassen, in diese Ebene eintrifft.

2. Die Neigung der Ebenen ABCD und FLKI gegen einander; 102. F. ist der Winkel zwischen zwo Linien GE, GH, die durch einen Punct G, des Durchschnitts beyder Flächen AB, jede in einer der beyden Ebenen, auf diesen Durchschnitt senkrecht gezogen werden. Also steht eine Ebene auf der andern senkrecht, wenn dieser Winkel ein rechter ist.

Gleichlaufende Ebenen sind, die nach allen Seiten erweitert nirgends zusammenstossen. Eine gerade Linie ist einer Ebene gleichlaufend, wenn

beyde

beyde ohne Ende verlängert und erweitert nie zusammenstossen.

Zus. Gleichlaufender Ebenen Durchschnitte mit einer dritten Ebene sind gleichlaufend. Denn sie sind in einer Ebene, nähmlich in der dritten, und können nie zusammenstossen.

Anm. Zwoer Flächen Durchschnitt ist ihre gemeinschaftliche Gränze; also eine Linie (I. Th. 4. Erkl.) und bey zwo Ebenen eine gerade (das. 7.).

3. **Ein körperlicher Winkel** (ang. solidus) einer **Ecke** B 103. F. ist zwischen mehr als zwo Linien, BA, BC, BD, deren nie mehr als zwo in einer Ebene liegen, an dem **Puncte**, wo sie alle zusammenstossen, enthalten.

Anm. Die verschiedenen ebenen Winkel, aus denen er bestehet, machen allemahl zusammen weniger als 4 R: diesen Satz, der Lehrsätze, die ich hier nicht beybringen werde, zu erweisen nöthig ist, findet sich beym Euklides XI. 21. nebst andern hieher gehörigen.

4. **Ein Prisma** (eine **Eckſäule oder Pfeiler**) ist der körperliche Raum, der zwischen zwo parallelen gleichen und ähnlichen Ebenen, die man **Grundflächen** (bases) nennt, und zwischen soviel Parallelogrammen oder **Seitenflächen** als jede der Grundflächen Seiten hat, enthalten ist. Man unterscheidet sie nach der Zahl der Seitenflächen, so heißt ein **dreyeckichtes**, dessen Grundflächen Dreyecke sind. Sind die Grundflächen auch Parallelogrammen, so entstehet ein **Parallelepidum**: Stehen die Seitenflächen auf die Grundflächen

senk-

senkrecht, so heissen diese Körper senkrechte (recta) sonst schiefe.

5. Den körperlichen Raum einer **Pyramide** begränzen, eine Ebene als **Grundfläche**, und soviel Dreyecke als sie Seiten hat, die alle in einem Puncte auser ihr ihre gemeinschaftliche Spitze haben. Die Zahl der Seiten der Grundfläche, oder der **Seitenflächen** gibt der Pyramide den Nahmen, z. E. eine **dreyeckichte** ꝛc. Ist die Grundfläche ein Kreis, so heißt sie ein **Kegel**, dessen Axe eine Linie von der Spitze nach der Grundfläche Mittelpuncte ist. Steht sie auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel **senkrecht** (rectus) sonst schief.

6. Der körperliche Raum einer **Kugel** (Sphaera) wird begränzet, indem sich ein halber Kreis um seinen Halbmesser als eine Axe drehet, bis er wieder in seine erste Lage kömmt. Die Fläche, welche des Halbkreises Umfang begränzet, heißt die **Kugelfläche**.

Zus. Weil die Axe, und der Mittelpunct des beschreibenden Kreises unbeweglich liegen bleiben, jeder Punct der Kugelfläche aber ein Punct in dem Umfange des Kreises ist, so sind alle Puncte der Kugelfläche von dem Mittelpuncte des Kreises gleich weit entfernt, welcher also auch der Kugel **Mittelpunct**, so wie des Kreises Halbmesser und Durchmesser auch der Kugel ihrer, ist.

7. Ordentliche Körper heissen solche, die in lauter ordentliche gleiche Vielecke von einer Art, die gleiche Ecken (3. Erkl.) machen, eingeschlossen sind.

1. Anm.

1. Anm. Man hat nur fünf dergleichen 1. der Würfel (hexaedrum, cubus) ein gerades Parallelipedum (4. Erkl.) das in lauter Quadrate eingeschlossen ist. 2. Das Tetraedrum; 3. Octaedrum; 4. Icosaedrum; 5. Dodecaedrum; Sie sind in 4; 8; 20; ordentliche Dreyecke, und in 12. ordentliche Zwölfecke eingeschlossen. Die Kürze gegenwärtiger Anfangsgründe verstattet nicht, umständlicher von ihnen zu handeln.

2. Anm. Man pflegt Netze zu machen, oder die Seitenflächen geometrischer Körper auf eine Ebene dergestalt zu verzeichnen, daß sie gehörig zusammengebogen den Körper einschliessen. Ihre Regeln lassen sich bey würklicher Vorweisung leichte begreifen. Die Beweise erfordern zum Theil Gründe, die hier nicht alle beygebracht werden können.

Grundsatz.

Eine gerade Linie, von welcher zween Puncte in einer Ebene sind, befindet sich ganz in dieser Ebene. (1. Th. 7 Erkl. und 1. Grundsatz.) Da aber die Ebene, in welcher diese gerade Linie ist, sich um sie als um eine Axe drehen kann, so bestimmen drey Puncte die Lage einer Ebene; und also ist jeder ebene Winkel, und jedes Dreyeck, in einer Ebene.

Anm. Dieses zeigt, warum eine Sache auf drey Füssen allemahl veste kann gesetzt werden, welches mit vier oder mehrern nicht so leicht angeht So hatten die Tische der Alten ordentlich drey Füsse. Sit mihi mensa tripes - - - Hor. Wagrecht stand deßwegen ein solcher Tisch nicht allemahl

- - mensae sed erat pes tertius impar
Testa parem fecit

Ou. Met. VIII; 661.

Von

Von der Lage der Linien und Ebenen.

45. Satz. Lehrsatz.

Wenn die gerade Linie AB, auf zwo Linien BD, BE, 104. F. senkrecht stehet, so stehet sie auf jeder Linie GBH die durch B in der Ebene DBE (Gr.) gezogen wird, d. i. auf dieser Ebene (1. Erkl.) senkrecht.

Bew. Man verlängere die beyden Linien bis BC = BD; BF = BE, und ziehe durch die vier Puncte F, C, E, D, die alle in der Ebene DBE liegen (Grundſ.) Linien, da denn die dritte willkührlich durch B gezogene Linie, FD, CE, in G, H, schneide. Von einem willkührlich angenommenen Puncte A in AB, ziehe man nach allen genannten Puncten Linien. Die Dreyecke, welche herauskommen, geben folgendes:

I) $\triangle FBD = \triangle BCE$ (2. S.) also $FD = CE$; $BFD = BEC$; $BDC = BCE$.

II) $\triangle FBG = \triangle EBH$ (1. und 3. S.) also $FG = EH$; $BG = BH$;

III) $\triangle ADB = \triangle ACB$ (2. S.); $AD = AC$;

IIII) $\triangle AFB = \triangle AEB$ (2. S.) $AF = AE$;

V) $\triangle AFD = \triangle AEC$ (I. III. IIII. und 4 S.) also $AFG = AEH$.

VI) $\triangle AFG = \triangle AEH$ (II. IIII. V. und 1. S.) also $AG = AH$.

VII) $\triangle ABG = \triangle ABH$ (II. VI. und 4. S.) also $ABG = ABH$ = R. w. z. E. w.

Zuſ.

Zus. Wenn AB, auf BD, BE, BH, senkrecht steht, so sind diese drey Linien in einer Ebene. Wären sie es nicht, so würden die Ebenen ABH, DBE, einander in einer andern geraden Linie als BH z. E. Bh schneiden, die aber doch in der Ebene ABH seyn, und durch B gehen müßte; auf Bh nun müßte vermöge des Satzes; AB sowohl senkrecht stehen als auf BH; (wider 9. S. 4. Z.).

46. Satz. Lehrs.

I. Wenn AB, CD, 105. F. beyde auf eine Ebene EF senkrecht stehen, so sind sie gleichlaufend; II. Wenn von zwo gleichlaufenden Linien eine AB, auf eine Ebene EF senkrecht stehet, so stehet die andere CD auf diese Ebene auch senkrecht.

Bew. I. Man ziehe BD, und auf sie in der Ebene EF, das Perpendikel DG = AB; so ist △ ABD = △GDB (2. S.) also AD = GB; und daher △ AGB = △GAD (4. S.) folglich GDA = ABG = R = GDB = GDC (11. S. 1. Erkl.) und die Linien DC, DA, DB in einer Ebene (45. S. Zus.) in welcher auch AB ist (II. Th. Grundsf.). Also sind AB, DC, in einer Ebene, und stossen doch, weil ABD + BDC = 2 R nicht zusammen (11. S.) d. i. sie sind gleichlaufend.

II. Nach eben den Vorbereitungen erhält man GDA = R also GD auf die Ebene BDA senkrecht (II. Th. 1. Erkl.) und in eben der Ebene befindet sich auch die Parallele DC, also ist auch GDC = R

aber

aber weil ABD=R (II. Th. 1. Erkl.) so muß auch CDB=R seyn (12. S.) folglich steht CD auf BD und DG, d. i. auf die Ebene BDG (48. S.) senkrecht.

1. Zus. Zwo Parallelen AB, CD, 106. F. mit einer dritten EF sind unter sich parallel, wenn gleich nicht alle drey in einer Ebene sind. Man richte durch G, auf EF, GH in der Ebene ABFE, und GI in der Ebene EFDC senkrecht auf, so sind HB, ID, auf die Ebene HGI senkrecht (46. S. II.) also unter sich gleichlaufend (46. S. I.).

2. Zus. Wenn die Winkel BAC, DEF, 107. F. nicht in einer Ebene, aber ihre Schenkel BA mit DE, und CA mit EF gleichlaufend sind, und beyder Schenkel nach einer Seite der Linie AE liegen, daß BAE, AED, und CAE, AEF, **innere entgegengesetzte**, nicht **Wechselswinkel** sind (11. S.) sind die Winkel gleich. Denn man nehme AB = ED; AC=EF, so sind DBAE; AEFC; Parallelogrammen (12. S.) und also BD = AE = CF; aber auch BD, CF, parallel (1. Z.) also BDFC ein Parallelogramm und BC=DF; folglich BAC=DEF (4. S.).

3. Zus. Von einem Puncte A in der Höhe; 108. F. wird auf die Ebene BC folgendermaassen ein Loth herabgelassen: Man ziehe in der Ebene nach Gefallen DE, und lasse darauf AF senkrecht (7. S.) ferner ziehe man durch F, auf DE in der Ebene FI senkrecht, worauf man aus A, AI senkrecht

fallen lasse, diese wird auf die Ebene senkrecht stehen. Denn man ziehe durch I, KL mit DE gleichlaufend; DE steht auf FA, FI, vermöge der Verzeichnung, also auch auf der Ebene AFI (45. S.) und folglich KL auf eben dieser Ebene (46. S. II.) senkrecht. Also ist LIA=R (II. Th. 1. Erkl.) aber AIF=R (Verzeichn.) also AI auf die Ebene FIL oder BC senkrecht (45. S.).

4. Zus. Aus einem gegebenen Puncte Q, auf die Ebene BC ein Loth aufzurichten, fälle man auf sie aus einem willkührlichen Puncte A das Loth AI (3. Z.) und ziehe damit durch Q, QS gleichlaufend (46. S. II.).

5. Zus. Aus einem Puncte A, fallen nicht zwey Lothe AF, AI, auf eine Ebene; sonst gäbe es in dem Dreyecke AFI zweene rechte Winkel (II. Th. 1. Erkl.). Eben so wenig können aus einem Puncte Q, zwey Lothe aufgerichtet werden, denn es gibt mit einer AI (3. Z. und 46. S. I.) nicht zwo Parallelen (12. S. 1. Z.) auch ist ein Loth die kürzeste Linie, die sich von einem Puncte bis an eine Ebene ziehen läßt (9. S. 10. Z.).

6. Zus. Wenn aus A ein Perpendikel AI auf die Ebene BC, und eines AF, auf die Linie DE in dieser Ebene fällt, so ist FI auf DE senkrecht. Denn sonst wird eine andere Linie durch F auf DE senkrecht, und ein Perpendikel aus A auf diese andere Linie, auf die Ebene nach 3. Zus. sowohl senkrecht seyn als AI wieder den 5. Zus.

7. Zus.

7. Zus. Wenn AI auf die Ebene BC, und IF auf DE in dieser Ebene senkrecht ist, so ist AF auf DE senkrecht. Denn sonst gibt es aus A ein anders Perpendikel auf DE; durch den Ort, wo selbiges in DE einschneidet, eine Linie in der Ebene BC auf DE senkrecht aufgerichtet, ist mit FI gleichlaufend (11. S.) und ein Perpendikel auf diese senkrechte Linie aus A, auf die Ebene BC senkrecht (3. Zus.) sowohl als AI, wieder den 5. Zus.

8. Zus. Wenn BC von einer andern Ebene in DE geschnitten wird, so nehme man in dieser andern Ebene auserhalb des Durchschnittes, wo man will, einen Punct A an, und fälle von solchem auf BC das Loth AI; und auf den Durchschnitt das Perpendikel AF, so ist der Winkel IAF spitzig (9. S. 3. Z.) es ist also nicht möglich, daß einerley gerade Linie auf zwo Ebenen, die einander schneiden, zugleich senkrecht stünde, und wenn daher eine Linie auf zwo Ebenen zugleich senkrecht stehet, so sind dieselben parallel.

9. Zus. Durch einen gegebenen Punct A eine Ebene zu führen, die mit einer gegebenen Ebene BC parallel liegt, fälle man von A auf BC das Loth AI, und ziehe durch I in BC, nach Gefallen zwo Linien IL, IF, mit jeder derselben aber eine gleichlaufende durch A; diese beyden gleichlaufenden sind in einer Ebene (II. Th. Grundſ.) und stehen beyde auf IA senkrecht (12. S.) also steht IA auf der Ebene durch sie senkrecht (45. S.) und diese Ebene ist mit BC gleichlaufend (8. Zus.).

10. Zus. Eine Linie kann nicht in einem Puncte zugleich auf zwo Ebenen seukrecht seyn, (8. Zus.) und durch einen Punct, geht mit einer Ebene, nur eine Ebene parallel (9. Z.) daher stehet eine Linie, die auf eine von zwo parallelen Ebenen senkrecht steht, auf der andern auch senkrecht (9. Z.).

47. S. Lehrs.

Wenn AI auf der Ebene BC senkrecht steht, so steht auf dieser Ebene jede Ebene durch AI senkrecht.

Bew. Eine solche Ebene schneide BC in KL; und man setze auf diesen Durchschnitt in BC das Perpendikel IF, so ist beyder Ebenen Neigungswinkel (II. Th. 2. Erkl.) FIA=R (II. Th. 1. Erkl.).

1. Zus. Wenn die Ebene durch KL und A, auf der Ebene BC senkrecht steht, und in jener aus einem willkührlichen Puncte A, ein Perpendikel AI auf beyder Durchschnitt KL gezogen wird, so steht solches auf BC senkrecht. Denn man setze in BC durch I auf KL das Perpendikel IF; weil AIL = R angenommen wird, so ist AIF beyder Ebenen Neigungswinkel, also auch =R (II. Th. 2. Erkl.) und AI auf BC senkrecht (45. S.).

2. Zus. Ein Perpendikel aus A auf BC gefällt, ist mit AI einerley, (46. S. 5. Z.) und liegt also in der senkrechten Ebene.

3. Zus. Wenn BC von einer senkrechten Ebene in KL geschnitten wird, so steht jedes Perpendikel,

IA das man auf KL in der senkrechten Ebene aufrichtet, auf BC senkrecht, denn man ziehe IF auf KL in BC senkrecht, so ist FIA = R also folgen die Schlüsse wie im 2. Zus.

4. Zus. Der beyden Ebenen BC und DAE Durchschnitt DE, steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels AFI senkrecht (II. Th. 2. Erkl. und 45. S.) also stehen beyde Ebenen auf der Ebene ihres Neigungswinkels, und diese auf jenen beyden senkrecht (47. S.).

5. Zus. Wenn die Ebenen dm; dl 114. F. und ADE, BC, 108. F. einerley Winkel mit einander machen, so kann man sie mit ihren gemeinschaftlichen Durchschnitten so aneinander setzen, daß ADE mit dm und BC mit dl in eine Ebene fallen. Es seyen ihre Neigungswinkel AFI, afi; und man lege die Ebene dl so in die Ebene BC, daß de längst DE, f auf F fällt, so fällt fi längst FI; weil ife = R = IFE; ferner stehen die Ebenen afi; AFI, beyde also über FI oder fi, auf einer Ebene BC oder dl senkrecht (4. Z.) und fallen also in eine Ebene; in welcher fa, FA auf einander fallen müssen, weil ifa = IFA.

6. Zus Parallele Ebenen dm, kn, machen mit einer dritten Ebenen dl gleiche Neigungswinkel. Ihre Durchschnitte mit der dritten, seyn de; kl, Parallelen (II. Th. 2. Erkl. Z) auf welche fi senkrecht stehe. Durch fi werde auf dl eine Ebene senkrecht gesetzt, welche dm und kn, in den Pa-

rallelen (II. Th. 2. Erkl. Z.) fa; iu; schneide, so ist afi = uio; aber diese beyden Winkel sind die Neigungswinkel (4. Z.).

7. Zus. Wenn die Ebenen dm, kn, eine dritte dl, in parallelen Linien de, kl, schneiden, und mit ihr, nach einer Seite zu, gleiche Neigungswinkel machen, so sind sie parallel. Denn von einem willkührlichen Puncte f, des einen Durchschnittes de, fälle man fio senkrecht auf der andern kl, so ist auch efi = R. Nun ziehe man fa in dm senkrecht auf ef; so ist afi der Ebene dm Neigung gegen dl, und ef steht auf der Ebene afi senkrecht (45. S.). Diese Ebene, schneide kn in iu; weil auch li auf dieser Ebene senkrecht steht, (46. S.) so ist liu = R und uio der Ebene kn Neigung gegen dl, also nach der Voraussetzung uio = afi, also ui und af parallel, weil sie auch in einer Ebene afi sind. Ein Perpendikel also von a auf ui gelassen, steht auch auf af senkrecht (12. S. 5. Z.) und befindet sich in der Ebene des Neigungswinkels afi oder uio, welche auf beyden Ebenen dm, kn, senkrecht steht (4. Z.) daher steht dieses Perpendikel, auf beyden Ebenen kn, dm, senkrecht (1. Z.) die daher parallel sind (46. S. 8. Zus.).

8. Zus. Parallellinien AB; CD; 128. F. haben gegen einerley Ebene MNO einerley Neigung; Man lasse von ihnen auf die Ebene die Lothe BE; DF herab; die ebenfalls parallel sind (46. S.) also sind die Winkel ABE = CDF (46. S. 2. Z.) aber

E = F,

E = F, folglich BAE = DCF (13. S.) d. i. die Neigungen sind gleich (2. Th. 1. Erkl.).

48. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwo Ebenen, wie AFI, AKL, auf einer dritten BC senkrecht stehen; so stehet jener beyder Durchschnitt AI auf der dritten auch senkrecht.

Bew. Man lasse von einem willkührlichen Puncte A des Durchschnittes beyder senkrechten Ebenen, ein Perpendikel AI auf der einen Ebene KLA Durchschnitt mit BC; dieses muß auf BC senkrecht stehen (47 S. 1. Z.). Aber ein Perpendikel aus A auf der andern senkrechten Ebene Durchschnitt mit BC, ist auch auf BC senkrecht (47. S. 1. Z.) und folglich mit AI einerley (46. S. 5. Z.) folglich ist der Punct I in beyder senkrechten Ebenen Durchschnitten mit BC; folglich in beyden senkrechten Ebenen, oder AI das Loth auf BC ist beyder senkrechten Ebenen Durchschnitt.

Von den Kugelschnitten.

49. Satz. Lehrs.

Eine Kugel mit einer Ebene durchschnitten gibt einen Kreis.

Bew. Aus der Kugel Mittelpuncte D 109. F. falle auf die schneidende Ebene das Loth DH; Man ziehe nach zween willkührlichen Puncten im Umfange des Schnittes E, F, gerade Linien aus D und

H; so ist DE=DF (II. Th. 6. Erkl. Z.) und DHE=DHF=R (II. Th. 1. Erkl.) also HEq =DEq-DHq=DFq-DHq=HFq oder HE =HF; d. i. alle Puncte des Umfanges von H als einem Mittelpuncte gleich weit entfernt.

Geht der Schnitt durch der Kugel Mittelpunct selbst, so sind alle Linien, die in seiner Ebene aus dem Mittelpuncte an seinen Umfang gezogen werden, dem Halbmesser der Kugel gleich (II. Th. 6 Erkl. Z.) und also ist er ein Kreis, welcher dem Kreise gleich ist, der die Kugel beschrieben hat.

1. Zus. Jeder Schnitt, der nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht, gibt einen kleinern Kreis als der ist, welcher die Kugel beschreibet, jeder Schnitt durch den Mittelpunct aber einerley Grösten.

2. Zus. Aus dem Ausdrucke des Halbmessers der Kugelschnitte $EH = r$ (DEq-DHq) folgt, daß die Kreise desto grösser werden, je näher sie bey dem Mittelpuncte sind; für den durch den Mittelpunct wird DH=o.

3. Zus. Eine gerade Linie schneidet die Kugelfläche in nicht mehr als zween Puncten. Denn man lege durch zweene Puncte, in welcher sie die Kugelfläche schneidet, und durch der Kugel Mittelpunct eine Ebene; Alle Puncte der geraden Linie befinden sich in dieser Ebene (II. Th. Grundsz.) und alle Puncte der Kugelfläche, welche in diese Ebene fallen, liegen in einem Kreise (49. S.). Sollte also die Kugelfläche von der geraden Linie dreymahl geschnitten

schnitten werden, so müssen drey Puncte dieses Kreises in die gerade Linie fallen, wieder 16. S. Zus. Da nun die Peripherien zweener Kreise einander in den Endpuncten ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes schneiden müssen, so können auch zweene Kreise auf der Kugelfläche einander nur zweymahl schneiden.

4. Zus. Jeder Kreis auf der Kugel ist der Durchschnitt einer gewissen Ebene mit der Kugel, und ein Loth aus der Kugel Mittelpuncte auf die Ebene dieses Kreises, geht durch seinen Mittelpunct, ein Loth aber aus seinem Mittelpuncte auf seine Ebene geht durch der Kugel Mittelpunct und eine Linie aus der Kugel Mittelpuncte durch des Kreises Mittelpunct steht auf seiner Ebene senkrecht (46. S. 5. Z.).

5. Zus. Gröste Kreise schneiden einander in einen gemeinschaftlichen Durchmesser durch den Mittelpunct der Kugel, und halbiren also einander. Es schneiden aber alle gröste Kreise einander, weil der Kugel Mittelpunct in aller Ebenen ist.

6. Zus. Kreise, die einander halbiren, sind größte Kreise: denn sie können einander nicht halbiren, ohne einerley Durchmesser, und folglich einerley Mittelpunct zu haben, also wäre eine Linie aus der Kugel Mittelpuncte an beyder Kreise gemeinschaftlichen Mittelpunct, auf beyder Ebenen senkrecht (3. Z.) wieder (46. S. 10. Z.). Bey größten Kreisen fällt ihr gemeinschaftlicher Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Kugel zusammen, und also kann durch diesen Mittelpunct auf jedes Ebene ein Loth gesetzt werden.

7. Zus. Wenn das Loth auf die Ebene eines Kreises durch seinen Mittelpunct, wie HD 109. F. verlängert wird, bis es der Kugel in zween Puncten (2. Z) P und Q begegnet, so ist jeder dieser Puncte, von allen Puncten des Kreises gleich weit entfernt, den $PEq = PHq + HEq$ und $QEq = QHq + HEq$; wo PH, HQ, HE, unveränderlich sind, E mag im Umfange des Kreises liegen, wo es will.

8. Zus. Wenn ein Punct der Kugelfläche P von allen Puncten eines Kreises gleich entfernt seyn soll, so muß ein Loth von ihm PH auf des Kreises Ebene gelassen durch desselben Mittelpunct gehen; denn wenn die Linie PE unveränderlich bleiben soll, E mag im Umfange des Kreises liegen, wo es will, so muß auch $HEq = PEq - HEq$ unveränderlich, und also der Mittelpunct seyn.

9. Zus. Also haben nur die im 7. Z. bestimmten Puncte diese Eigenschaft, daß sie von allen Puncten des Kreises gleich weit entfernt sind. Man nennt sie **Pole** des Kreises.

10. Zus. Wenn eine Ebene durch das Ende des Halbmessers auf ihn senkrecht gesetzt wird, so liegen alle ihre übrigen Puncte auserhalb der Kugel (46. S. 5. Z.) oder sie **berühret** die Kugelfläche. Diese Ebene ist für die Kugel, was die Tangente 19. S. für den Kreis ist; und ein Loth auf die Kugelfläche durch einen gegebenen Punct ist ein Loth auf die Ebene, welche die Kugel in diesem Puncte berühret, und mit der Kugelfläche ein Element gemein hat (wie im 41. S. 5. 6. Z.).

50. Satz. Lehrsatz.

Eine gerade Linie PQ durch die beyden Pole des Kreises BEG steht auf seiner Ebene senkrecht und geht durch seinen Mittelpunct, und durch der Kugel Mittelpunct.

Bew. Das Loth PH von einem Pole P auf dem Kreis gefällt, geht durch seinen Mittelpunct (49. S. 8. Z) und durch den andern Pol (49. S. 7. Z. und 46. S. 5. Z.) und durch der Kugel Mittelpunct (49. S. 4. Z.) weil es nun durch zweene Puncte nur eine gerade Linie gibt, so muß die Linie durch beyde Pole mit diesem Lothe einerley seyn.

1. Zus. Ein Kreis PBQG durch des Kreises BEG Pole, steht auf ihm senkrecht (47. S) und ist ein größter Kreis (49. S. 1. Z.) und schneidet die Ebene des Kreises BEG so, daß beyder Ebenen Durchschnitt, durch H des Kreises BEG Mittelpunct geht, das ist ein Durchmesser von BEG ist, und also diesen Kreis halbiret.

2. Zus. Wenn ein gröster Kreis auf einen andern grösten oder kleinern senkrecht steht, so geht er durch dieses andern Pole durch und halbirt ihn. Denn man ziehe durch des größten Kreises, d. i. durch der Kugel, Mittelpunct ein Loth auf die Ebene des andern; dieses befindet sich in dem größten Kreise (47. S. 2. Z.) und geht durch des andern Mittelpunct (49. S. 4. Z.) und Pole (49. S. 7. Z.) also folgt der Beweis wie im 1. Z.

3. Zus.

3. Zus. Wenn zweene gröste Kreise auf einander senkrecht stehen, so geht jeder durch des andern Pole (2. Z.).

4. Zus. Die Bogen PE, PB, gröster Kreise zwischen dem Kreise BEG, und seinem Pole, sind gleich (22. S. 1. Z. und 49. S. 9. Z.).

51. Satz. Lehrs.

Kreise, deren Ebenen parallel liegen; Parallelkreise MN, KL, haben einerley Pole P, Q, IIO. F.

Bew. Des einen Pole sind in einem Lothe aus der Kugel Mittelpuncte auf seine Ebene (50. S.) und eben dieses Loth steht auch auf des andern Ebene senkrecht (46. S. 10. Z.) und geht also auch durch seine Pole; (50. S.). Es schneidet aber die Kugelfläche nur in zween Puncten (49. S. 3. Z.) und also sind diese Durchschnittspuncte die Pole beyder Kreise, oder auch mehrerer, derer Ebenen parallel liegen.

52. Satz. Lehrsatz.

Wenn durch zweener Parallelkreise Pole größte Kreise PGDQ; PHEQ, geführet werden, so sind der Parallelkreise Bogen zwischen ihnen GH; DE; ähnlich.

Bew. Die gerade Linie PQ, schneide beyder Parallelkreise Ebenen in ihren Mittelpuncten (50. S.) F; C, so sind GFP; HFP; DCP; ECP, rechte Winkel (50. S. und II. Th. 1. Erkl.) aber die Linien

GF,

GF, DC, in einer Ebene, nähmlich des Kreises PGDQ, und also parallel und eben so die Linien HF, EC; also die Winkel DCE = GFH (46. S. 2. Z.) also ihre Maasse GH, DE ähnlich (22. S. 6. Z.).

1. Zus. Jeder der genannten Winkel ist die Neigung der Halbkreise PGDQ, PHEQ gegen einander; (49. S. 5. Z. und II. Th. 2. Erkl.) woraus ebenfalls ihre Gleichheit erhellt.

2. Zus. Der Kreis KDEL kann ein größter seyn, wenn er durch den Mittelpunct gehet; alsdenn ist der Bogen PD das Maaß des rechten Winkels PCD (22. S.) also = 90° = PHE (50. S. 4. Z.) oder der Bogen PD eines größten Kreises zwischen dem größten Kreise KDL und dessen Pole PD ist ein Quadrant.

3. Zus. Die Neigung der Kreise PDQ, PEQ hält so viel Grade eines größten Kreises als der Bogen DE hat.

4. Zus. Eben diese Neigung wäre auch so groß als der Winkel AQB, dem zwo Tangenten, eine QA des Kreises PDQ, die andere QB des Kreises PEQ, mit einander machten weil jede Tangente, auf den gemeinschaftlichen Durchmesser PQ, in der Ebene ihres Kreises senkrecht stehet. Diese Tangenten aber stellen die Richtungen ihrer Bogen bey Q vor, (41. S. 6. Zus.) daher sagt man die Kreise selbst machen bey Q oder P den Winkel AQB = DCE. Man heißt einen solchen Winkel zweener größten

Kreise

Kreise mit einander, einen sphärischen Winkel, dessen Maaß also ein Bogen eines größten Kreises ist, der zwischen den beyden Puncten D, E, enthalten ist, die jeder in seinem Kreise, 90. Gr. von Q entfernt sind. Sphärische Scheitelwinkel sind gleich; und Nebenwinkel machen zusammen 2 R.

5. Zus. Wenn QD, QE zweene Quadranten gröster Kreise sind, so steht der gröste Kreis durch ED auf beyde Quadranten senkrecht, und geht durch beyder Pole. Denn dieser Kreis liegt in der Ebene DCE; welche auf PQ senkrecht stehet (2. Zus.) woraus die Wahrheit vermöge des 2. Zus. folgt.

6. Zus. Die beyden andern größten Kreise gehen aber auch durch die Pole des dritten, (50. S. 3. Z.) welche also in P und Q seyn müssen (49. S. 3. Z.).

7. Zus. Der Pol eines größten Kreises KDL wird gefunden wenn man auf den Kreis einen andern grösten QDP senkrecht setzt, und in solchen den Bogen $DP = 90°$ nimmt.

8. Zus. Einen größten Kreis durch zweener andern Pole zu setzen, muß man ihn auf beyde (50. S. 3. Z.) d. i. auf ihren Durchschnitt (48. S.) senkrecht setzen. Also wird ein größter Kreis KDEL durch der beyden PDQ; PEQ, Pole gehen, wenn seine Ebene auf dem Durchmesser PQ in dem sich jene beyden schneiden, senkrecht stehet.

9. Zus. Wenn mehr größte Kreise einander alle im Durchmesser PQ schneiden, so geht KDEL (8. Z.) durch aller Pole.

10. Zus.

10. Zus. Wenn 111. Fig. S; s; die Pole des Kreises PDQ, 110. F. und T; t, des Kreises PEQ sind, (8. Zus.) so ist DT + TD = 90. Gr. = TD + DE; also DE = ST = 1t; folglich St = Sts - st = 180. Gr. - DE oder die Entfernung der beyden Pole zweener grösten Kreise die beyde nach einer Seite der Kreise zu liegen, ist dem spitzigen Winkel der Kreise gleich (4. Z.) und die Entfernung des Poles, der auf des ersten Kreises einen Seite liegt, von dem Pole, der auf des andern anderer liegt, ihrem stumpfen Winkel.

11. Zus. Zweene gröste Kreise machen mit einem dritten nicht gleiche Winkel nach einer Seite. (49. S. 5. Z. und 47. S. 7. Zus.).

Die Möglichkeit prismatischer Körper.

53. Satz. Aufg.

Die Lage und Gestalt der untern Grundfläche ABCD 112. F. eines Prisma sind gegeben; imgleichen eine Ebene, die mit dieser parallel ist. Man soll die Möglichkeit eines Prisma zwischen diesen beyden Ebenen zeigen.

Aufl. Man ziehe nach Gefallen durch einen Winkelpunct der untern Grundfläche, eine Linie Aa bis an die parallele Ebene; so wird a eben der Winkelpunct in der obern Grundfläche seyn. Mit

Aa, ziehe man durch alle untern Winkelpunete Parallelen bis an die parallele Ebene, Bb, Cc, Dd, so gibt sich in jeder Parallele, wo sie die parallele Ebene, schneidet, eben der Winkelpunct der obern Grundfläche. Man hat also die Winkelpuncte und Seiten der obern Grundfläche; die letztern schliessen mit den gezogenen Parallelen die Seitenflächen des Prisma ein.

Bew. Die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, sind alle unter sich parallel (46. S. 1. Z.). Man nehme nun, welche Seite der untern Grundfläche man will, z. E. CD, und betrachte die beyden Parallelen durch ihre Endpuncte Cc, Dd; die Ebene, in der sich diese Parallelen befinden, schneidet die beyden parallelen Ebenen der obern und untern Grundfläche in zwo Parallellinien cd, CD, (II. Th. 2. Erkl. Zus.) die selbst zwischen Parallelen Cc, Dd, enthalten, und daher gleich sind (12. S. 3. Z.). Eben so erhellt, daß cb, CB, parallel und gleich sind; da nun vermöge des Verfahrens; cb, cd, mit CB, CD, auf einer Seite der Linie Cc liegen, so ist dcb = DCB (46. S. 2. Z.). Wenn man also die Figur, welche die Parallelen durch A, B, C, D, in der parallelen Ebene auf die erwähnte Art bestimmen, so ringsherum betrachtet, so findet sich, daß in ihr die Winkel und die Seiten der Grösse nach eben so nach einander folgen, wie in der Figur ABCD; also ist abcd die obere Grundfläche, und Aa bB. BbcC u. s. w. sind Parallelogrammen und Seitenflä-

tenflächen eines Prisma, dessen Seiten Aa; Bb, Cc, u. s. w. alle von einer Länge sind.

1. Zus. Wenn nur die Ebene, in welcher die obere Grundfläche des Prisma liegen soll, gegeben ist, so kann die Linie Aa unzählige Lagen haben. Wäre aber der Punct a, der das oben seyn soll, was A unten ist, gegeben, so müßte man Aa dadurch ziehen. Dieser Umstand bestimmt also ein einziges Prisma, da sonst unzählige, welche der Aufgabe genug thun, möglich sind.

2. Zus. Wenn Aa auf die untere Grundfläche senkrecht stehet, so stehet sie auch auf die obere senkrecht (46. S. 10. Z.) und alle Parallelen Bb, Cc, u. s. w. stehen auf beyde Grundflächen senkrecht (46. S.) auch sind alle Seitenflächen auf beyde Grundflächen senkrecht (47. S.) dieses zeigt die Möglichkeit eines senkrechten Prisma (II. Th. 4. Erkl.) über jeder Grundfläche, und für jede Weite der Grundflächen von einander.

3. Zus. Ein Prisma mit der Grundfläche parallel durchschnitten, zeigt eine Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ die jeder Grundfläche gleich und ähnlich ist. Denn jede Ebene, die mit der Grundfläche parallel liegt, schneidet die Ebenen Ab; Bc; Cd; u. s. f. in Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, u. s. f. die mit AB, BC, CD, u. s. f. parallel sind (2. Th. 2. Erkl. Zus.) und auch ihnen gleich sind (12. S. 3. Z.) und einerley Winkel machen (46. S. 2. Z.).

4. Zus. Wenn zwo Seiten der Grundfläche wie AD, BC, parallel sind, so sind die ihnen zugehörigen Seitenflächen Ad, Bc, parallel; Stiessen sie irgendwo zusammen, so könnte man durch einen Punct, der in beyden zugleich wäre, eine Ebene mit der Grundfläche parallel legen; deren Durchschnitte mit beyden Ebenen Ad; Bc; also durch einen Punct gingen, aber jede Ebene, die mit der Grundfläche parallel liegt, macht in Ad, Bc, Durchschnitte, die mit AD, BC, parallel (3. Z.) und also auch unter sich parallel sind (46. S. 1. Z.). Ueberhaupt erhellet folgendes: Wenn die vier Linien Aa; Bb; Cc; Dd; parallel sind, so sind die Ebenen Ab mit Dc; Ad, mit Bc parallel.

5. Zus. Wenn die Grundflächen Parallelogrammen sind, so sind die Seitenflächen vier Parallelogrammen, deren jede zwey gegenüberstehende parallel sind (4. Zus.). Ein Parallepipedum (II. Th. 4. Erkl.) ist also in sechs Parallelogrammen eingeschlossen, da die gegenüberstehenden paarweise parallel und gleich sind. Die Gleichheit folgt daraus, weil in diesem Falle AD = BC.

6. Zus. Ein senkrechtes Parallelepidum, hat vier Rechtecke zu Seitenflächen: Sind auch seine Grundflächen Rechtecke, so ist es in sechs Rechtecke eingeschlossen. Man kann es alsdenn **rechtwinklicht** nennen. Seine Seitenflächen stehen alle senkrecht auf einander. Denn wenn Ab, Bc, auf AC senkrecht stehen, so steht Bb auf AC senkrecht

(48. S.)

(48. S.) und A B C ist der Ebenen A b, B c, Neigungswinkel.

7. Zus. Hat ein senkrechtes Parallelepipedum, Quadrate zu Grundflächen; und ist die senkrechte Weite der Grundflächen wie A a 129. F. der Seite des Quadrates gleich; so sind die Seitenflächen wie A b, Quadrate, von einerley Grösse mit der Grundfläche; und das Parallelepipedum ist rechtwinklicht. Es heißt ein Würfel (cubus) dessen Seite die Seite eines solchen Quadrats heißt, deren sechs ringsherum den Würfel einschliessen.

8. Zus.. Mit der Ebene des Kreises, der K zum Mittelpuncte, K E zum Halbmesser hat 113. F. liege eine andere parallel, die von einer durch K nach Gefallen gezogenen Linie in k geschnitten werde. Durch einen willkührlichen Punct im Umfange des Kreises, E, ziehe man E e mit K k parallel; die Ebene durch K k und E e, wird die parallele Ebene in einer Linie, die mit K E parallel ist, schneiden. (II. Th. 2. Erkl. Zus.). Es geschehe in k e, so ist k e = K E (12. S. 3. Z.) also e im Umfange eines Kreises der k zum Mittelpuncte und des untern Kreises, Halbmesser zu dem seinigen hat. Da also E jeden Punct im Umfange des untern Kreises z. E. F vorstellet, so gibt sich oben auch ein Kreis; und beyder zusammengehörige Puncte sind mit geraden Linien E e, F f, verbunden. Diesen Körper schliessen also zweene gleiche und parallele Kreise als **Grundflächen**, und eine krumme **Seitenfläche**

ein. Er heißt ein **Cylinder**, die Linie E e seine **Seite** und die ihr gleiche K k seine Axe; Steht sie auf den Grundflächen senkrecht, so heißt er auch senkrecht, sonst schief. Wenn zweener Cylinder (oder auch Kegel) Axen einerley Neigung gegen ihre Grundfläche, und einerley Verhältnisse gegen ihrer Grundflächen Durchmesser haben, heissen sie ähnlich.

9. Zus. Jeder Durchschnitt, der im Cylinder mit der Grundfläche parallel geschieht, ist ein Kreis der Grundfläche gleich, den man kann die parallele Ebene, in der k und e sind, dem untern Kreise um K nahe oder weit legen, und die vorigen Schlüsse bleiben alle ungeändert, weil die Weite der Ebenen in sie keinen Einfluß hat. Eben so liesse sich auch der 3. Zus. darthun.

10. Zus. Man kann sich also vorstellen, ein Cylinder entstünde, indem sich der Kreis k e f an der Linie e E so herunter bewegt, daß seine Ebene sich beständig parallel; und e k beständig in der Ebene e E K bleibt. Durch eine ähnliche Bewegung der Figur a b c d 129. F. an a A herunter, entstehet das Prisma.

11. Zus. Im senkrechten Cylinder, ist E K k e ein Rechteck (46. S. 10. Z.) in dessen Seite K k die Mittelpuncte aller Querschnitte (9. Zus.) liegen. Er entsteht also, indem sich dieses Rechteck um die Axe K k drehet. Seiner Grundflächen senkrechte Weite, oder seine **Höhe** ist die Axe K k oder Seite E e.

12. Zus.

12. Zus. Ist EF unendlich klein, so kann man es als gerade und EFfe als eine unendlich kleine Ebene ansehen; die auf der Grundfläche senkrecht stehet, wenn Kk und Ee darauf senkrecht stehen. (47. S.). So ist der Cylinder ein Prisma von unzählich vielen Seiten, und der senkrechte ein senkrechtes.

13. Zus. Wären 112. F. $D\delta = \delta d$; so wären die Prismata $D\beta = \delta b$ denn sie würden einander decken oder eins genau in das andere hohle passen, wenn man des obern δb, untere Grundfläche $\delta\beta$ auf die untere Grundfläche DB des untern legte.

Hieraus fließt weiter dieses: wenn man die Seitenlinie $D\delta$ eines Prisma in lauter gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspuncte Schnitte mit der Grundfläche parallel führt, so sind zwischem jedem Paare nächster Schnitte, gleiche kleine Prismata enthalten, oder das Prisma $D\beta$ wird dadurch in soviel gleiche Theile getheilt soviel man in der Linie $D\delta$ macht.

14. Zus. Läßt sich also δd, welches ich nun nicht mehr $= D\delta$ setze, in Theile von eben der Grösse theilen wie man in $D\delta$ gemacht hat, so enthält das Prisma δb soviel kleine gleiche Prismata, soviel δd gleiche Theile enthält. Und so darf man sich nur des 24. S. erinnern, um zu schliessen daß $D\beta : \delta b = D\delta : \delta d$ auch wenn eine dieser Verhältnisse irrational wäre. Die kleinen Prismata sind hier in Absicht auf die beyden grossen, völlig das was die

kleinen Dreyecke DEd, BAb, 78. F. in Absicht auf die beyden grossen DEC, CAB, sind.

Haben also zwey Prismata gleiche und ähnliche Grundflächen DB, δβ, und machen ihre Seitenlinien Dδ, δd, die durch ähnlich liegende Winkelpuncte der Grundflächen gehen, gleiche Winkel mit den Grundflächen (wenn ein Paar Seitenlinien dieses thut, thut es jedes) (53. S.) so verhalten sich die Prismata wie diese Seitenlinien.

15. Zus. Folglich auch wie Perpendikel von δ, d, auf DB, δβ, gelassen, oder wie der Prismatum Höhen, denn diese Perpendikel werden sich wie Dδ : δd verhalten, welches nach Art des 47. S. 8. Z. leicht zu sehen ist. Ist das Prisma senkrecht, so sind Dδ, δd, selbst die Höhen.

16. Zus. Ueber der Grundfläche FGKH 115. F. stehe ein Parallelepipedum HCKD 131. F. seine Seitenflächen sind FGCD; HKTR; und GKTC; FHRD; Man ziehe in der Ebene DG, nach Gefallen durch F und G, parallele Linien, die DC verlängert nothwendig irgendwo in B, A, schneiden werden; so ist FBAG ein Parallelogramm: weil BA, auf der verlängerten DC liegt, die mit FG parallel geht, und also FB, GA, Parallelen zwischen Parallelen sind. Nun sey HS der Durchschnitt der Ebenen RK und FBH; und zwar liege S in der verlängerten RT; weil die Ebenen RK, DG, parallel sind, so sind HS FB parallel (II. Th. 2. Erkl. Zus.). Eben so, werden KN, GA, parallel seyn, wenn KN der Ebenen AGK, und RK,

Durch-

Durchschnitt ist; Also sind KN, FB, beyde mit GA, und daher unter sich parallel; (46. S. 1. B.) Eben so ist HS mit GA parallel, weil beyde mit FB parallel sind; oder alle vier Linien FB, GA, KN, HS, sind parallel; also BS=FH=GK=AN (12. S. 3 B.) weil BS; AN, der Ebenen HFB, AGK, Durchschnitte mit zwo Parallelen Ebenen RA; HG, sind. Daher sind BANS=FGKH; FBSH=GANK; FBAG=HSNK, Parallelogrammen. So entsteht also ein Parallepipedum, HAKB; welches ich das zweyte nennen will; Es hat mit dem ersten HCKD, einerley Grundfläche FGKH; steht mit ihm zwischen einerley parallelen Ebenen FK und RA, das heißt, beyde haben einerley Höhe und zwo gegenüberstehende Seitenflächen des zweyten Parallelepipedi, nähmlich FA, HN liegen mit zwo deraleichen Seitenflächen des ersten mit FC; HT in einerley Ebenen.

Die Ausmessung der Körper.

54. Satz. Lehrs.

Zwey Parallelepipeda wie die im nächsten Zusatze, sind gleichen Innhalts.

Bew. Die Linien FB, GC, mögen einander in L und HS, KT, in M, schneiden, so wird LM der Ebenen FS, KC Durchschnitt seyn, und ist also weil HD; KC; parallel sind; parallel mit FH (II. Th. 2. Erkl. B.) folglich auch mit BS und CT die mit FH parallel sind. Also sind MLBS; MLCT,

Parallelogrammen wie auch BCTS; die Dreyecke BCL, STM, aber haben einerley Seiten und liegen in parallelen Ebenen; also schliessen die genannten Parallelogrammen und Dreyecke zwischen sich ein Prisma BSMLCT ein; Eben so ist LMKHFG ein anderes Prisma.

Ferner ist das Prisma DRHFBS=CTKGAN denn man lege die Ebenen DRHF; CTKG; auf einander, daß D auf C u. s. f. fallen; Diese beyde Ebenen sind parallel (53. S. 5. Z.) und machen also mit der Ebenen DS, CN, einerley Winkel (47. S. 6. Z) welche beyde Ebenen also nun in eine fallen, (47 S. 5. Z) weil nun DC=BA=RT=SN, so ist DB=CA=RS=TN und also fallen nun die Puncte B; S; auf A; N; folglich decken die Seitenflächen DS, CN, einander, so wohl als die BH, AK; und die Dreyecke DBF, CAG, imgleichen RHS, TKN; so erhellet also, daß beyde Prisma einander decken, und folglich gleich sind.

Von diesen beyden gleichen Körpern nun nehme man das Prisma BSMLCT weg, so bleiben zweene Körper gleichen Inhalts übrig; die Ebenen, die sie einschliessen, sind bey dem einen; FLMH; FHRD; RDCT; CTML; bey dem andern; GLMK; GKNA; NASB; BSML; zu jeden dieser beyden gleichen Körper setze man wieder das Prisma LMKHFG; so kommen die beyden Parallelepipeda heraus, deren Gleichheit erwiesen werden sollte.

55. Satz.

55. Satz. Lehrs.

In der 116. F. sey das erste Parallelepipedum; wie 53. S. 8. Z; auf eben der Grundfläche FGKH, stehe ein drittes von gleicher Höhe; aber keine seiner Seitenflächen, liege mit den Seitenflächen des ersten in einerley Ebene; die Seitenflächen FGQP; HKVO machen nähmlich mit der Grundfläche FGKH, zwar einerley Winkel, aber andere als die, welche die Seitenflächen FC; HT, mit eben der Grundfläche machen; und so verhält es sich auch mit den Seitenflächen FHOP; GKVQ; in Vergleichung derer FR; GT; Ich behaupte dem ohngeachtet, daß diese beyden Körper gleichen Innhaltes sind.

Bew. Weil die obere Grundfläche PQVO mit DCTR in einer Ebene liegt, so werden DC, RT, verlängert in PO; QV; wo nöthig verlängert, einschneiden; es geschehe solches in B; S; A; N; so sind B; A; in der Ebene FC; und S; N; in der Ebene HT; und wegen der Parallelen PO; QV; sind BA, SN, parallel und gleich (12. S. 3. Z.) jede nähmlich = PQ = OV; Eben so ist AN = BS = CT = PO; also die Parallelogrammen ABSN = QPOV = GFHK; folglich sind die gerade Linien AG; BF; SH; NK; alle parallel und gleich (12. S. 3. Z. und 46. S. 1. Z.) also entsteht ein Parallelepipedum, dessen beyde entgegengesetzte Grundflächen FGKH; PQVO; sind; das hier, Verwirrung zu vermeiden, nicht vorgestellt wird, aber

mit dem zweyten der 115. F. einerley ist, es hat zwo Seitenflächen FBSH; GANK, in einerley Ebenen, mit den beyden Seitenflächen FPOH; GQVK, und ist also dem dritten gleich (54. S.). Es hat aber auch die beyden Seitenflächen FBAG; HKNS, in einerley Ebenen, mit des ersten beyden Seitenflächen FC; HT; also ist es auch diesem gleich. Folglich sind das erste und dritte unter sich gleich.

1. Zus. Alle Parallelepipeda, über einerley Grundfläche, und von gleicher Höhe, sind gleichen Innhalts.

2. Zus. Jedes Parallelepipedum FVPK 116. F. ist so groß als eines von gleicher Höhe, das auf eben der Grundfläche lauter senkrechte Seitenflächen hat. Man richte nähmlich durch der Grundfläche Winkelpuncte F, G, K, H; Lothe auf ihre Ebene auf, bis solche an die Erweiterung der Ebene PQVO in D, C, T, R, treffen; so bekömmt man vier Rechtecke (46. S. 10. Z.) FDCG; HRTK; FHRD; GKTC; welche auf der Grundfläche senkrecht stehen; (47. S.) und paarweise, wie ich sie zunächst nach einander genannt habe, parallel sind; (53. S. 5. Z.) also ein Parallelepipedum, FCRK wie dieser Zusatz fodert, dessen Gleichheit mit FVPK aus 1. Zus. erhellt.

56. Satz. Lehrsatz.

Ein Parallelepipedum 117. F. dessen Seitenflächen GD, KR, KC, HD, auf der Grundfläche GH senk-

senkrecht stehen; ist so groß als eines von eben der Höhe, das ein Rechteck, welches jener Grundfläche gleich ist, zur Grundfläche hat.

Bew. Man lasse Kh, Gf, senkrecht auf HF; so ist das Rechteck KhfG dem Parallelogramm KHFG, gleich. Man ziehe auf HF in der Ebene HD Perpendikel hr, fd bis an RD sie werden auf die Ebene KF senkrecht seyn; (47. S. 1. B). Ferner sind Tr; Cd; der Ebenen Th; Cf, Durchschnitte mit der Ebene TD, also mit Kh; Gf; und folglich auch unter sich parallel und gleich, daher rd=CT=RD, und CdD=GfF (46. S. 2. B.) =90° =TrR, also ist TrdC ein Rechteck, das dem untern KhfG gleich und ähnlich ist, und dhfr; CGKT; imgleichen dCGf, rTKh, sind gleiche und ähnliche, parallele (13. S. 3. B.). Rechtecke, welche also mit den nur genannten Rechtecken, ein rechtwinklichtes Parallelepipedum (53. S. 6. B.) einschliessen; dieses hat nun mit dem im Satze genannten einerley Inhalt. Denn es geht ihm auf der einen Seite das Prisma TKHhrR ab, auf der andern kömmt das CGFfdD darzu, welche beyde gleich sind, wie man nach dem Verfahren beym 54. S. beweisen kann. Nähmlich die Seitenflächen TrhK; CdfG können so auf einander gelegt werden, daß sie einander decken; und weil TRHK; CDFG, mit ihnen gleich grosse Winkel, nähmlich hKH; fGF, machen, so decken auch diese beyden Flächen, und folglich die beyden Prismata einander.

1. Zus.

1. Zus. Parallepipeda von einer Höhe haben einerley Inhalt, wenn ihre Grundflächen einerley Inhalt haben.

2. Zus. FGCD RHKT 117. F. und ABHE FDCG 118. F. sollen zwey senkrechte Parallelepipeda bedeuten, deren Grundflächen FC, AH, gleich, aber nicht ähnlich sind; Ihre Seitenlinien FH; AD, stehen also senkrecht auf den Grundflächen, und sind folglich ihre Höhen. Diese beyden Parallelepipeda, die ich der Kürze wegen CH; HD, nennen will, verhalten sich wie ihre Höhen. Denn man nehme AQ = FH; und lege durch Q eine Ebene mit AH parallel, so schneidet sie von HD ein Stück HQ ab, das vermöge des 1. Zus. = CH ist. Es verhält sich aber HQ: HD = AQ: AD (53. S. 15. Zus.). Folglich CH: HD = FH: AD.

57. Satz. Aufgabe.

Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum auszumessen. 118. F.

Aufl. Man messe mit einerley Maasse AK, seine drey Seiten AB, AE, AD, die Zahlen, welche für diese Seiten herauskommen; zeigen an, wievielmahl der Würfel von der Seite AK in dem Körper enthalten ist.

Bew. So vielmahl das Maaß AK in der Seite AB enthalten ist, so viel Würfel von der erwähnten Grösse, können neben einander an AB gesetzt werden;

diese

diese Reihe von Würfeln läßt sich so vielmahl wiederhohlen, so vielmahl das Maaß in AE enthalten ist. So gibt es eine Schicht von Würfeln, die den Boden ABHE bedecken, weil jedes Würfels Grundfläche ein Quadrat ist, und solchergestalt gefunden wird, wieviel dergleichen Quadrate oder Grundflächen in dem Boden Raum haben (42. S.). In der Weite vom Boden KL = AK welche der Höhe des Würfels gleich ist, schneide man das Parallelepipedum parallel mit dem Boden, so bekömmt man eine Fläche, die dem Boden gleich und ähnlich ist (53. S. 3. Z.), und in der die obern Grundflächen der ersten Schicht aller Würfel liegen. Auf diesen zweyten also, läßt sich wieder eine Schicht Würfel setzen, und dieses so vielmahl wiederhohlen, so vielmahl die Höhe des Würfels, oder das angenommene Maaß, in der Linie AD enthalten ist. Diese Zahl also gibt die Menge der Schichten, und folglich die Menge aller Würfel, wenn man sie mit der Menge Reihen, das ist, mit dem Producte der Menge der Würfel einer Reihe in die Zahl der Reihen multipliciret. Wenn also AB, AE, AD, Zahlen bedeuten, deren Einheit AK ist; so ist das Product AB. AE. AD, die Menge der Würfel, welche das Parallelepipedum enthält.

1. Zus. Nennt man diese drey Linien Länge, Breite und Höhe, so gibt das Product aus ihnen den körperlichen Inhalt.

2. Zus. Sie mögen a; b; c; heissen, so ist der Inhalt = abc;

3. Zus.

3. Zus. Also = a^3 wenn alle drey gleich sind:

4. Zus. Es sey AK = d; a = 10. d so ist a^3 = 1000. d^3.

5. Zus. Also hält bey Decimalmaasse, der Würfel, der eine Ruthe, d. i. zehn Fuß; zur Seite hat; 1000 Cubikfuß; der Cubikfuß 1000 Cubikzoll; u. s. w.

6. Zus. Würde aber das Längenmaaß nach 12. eingetheilt, so hielte die Cubikruthe; 12. 12. 12 = 1728 Cubikfuß, der Cubikfuß 1728 Cubikzoll, u. s. w.

7. Zus. So lassen sich höhere Maasse auf niedrigere und umgekehrt, bringen; z. E. 12678453729 Cubiklinien sind 12 ° 678′ 453″ 729‴ wenn zehntheilichtes Maaß gebraucht worden. Bey zwölftheilichten müßte man die gegebene Zahl durch die Division mit 1728. auf Zoll; die Zolle durch eben dergleichen Division auf Fuß; und die Fuß wieder durch dergleichen auf Ruthen bringen.

8. Zus. Wenn ein anderes Parallelepipedum, dessen Seiten mit eben dem Maasse gemessen werden, die Zahlen α, β, γ, gibt; so verhält sich beyder Inhalt (2. Z.) wie abc: $\alpha\beta\gamma$; d. i in der Verhältniß, die aus den dreyen a: α; b: β; c: γ zusammen gesetzt ist.

9. Zus. Ist a: α = b: β = c: γ, also $\beta = \frac{\alpha b}{a}$; $\gamma = \frac{\alpha c}{a}$, so ist abc: $\alpha\beta\gamma$ = abc: $\frac{bc\alpha^3}{a^2}$ = a^3: α^3; Solche rechtwinklichte Parallelepipeda heissen

heissen ähnlich, und sie verhalten sich also wie die Würfel ähnlich liegender Linien in ihnen. Bey schiefen wird zur Aehnlichkeit auch noch eine gleiche Neigung der Seitenflächen gegen einander und gegen die Grundflächen erfodert.

10. Zus. Die Anm. und der 3. Zus. des 42. S. finden auch hier statt.

Sonst läßt sich nach Art dessen, was dorten erinnert worden, der Beweis hier auch so führen. Man stelle sich vier rechtwinklichte Parallelepipeda vor, die ich mit A, B, C, D, bezeichnen will; Es habe ferner

A die Seitenlinien	a	b	c
B	α	b	c
C	α	β	c
D	α	β	γ

Nun nehme man zur gemeinschaftlichen Grundfläche

das Rechteck b. c bey A | B
α. c B | C
α. β C | D

so ist aus 56. S. 2. Zus.

$$A : B = a : \alpha$$
$$B : C = b : \beta$$
$$C : D = c : \gamma$$

also (Ar. V, 50.) $A : D = a.b.c : \alpha.\beta.\gamma$

wodurch also der hiesige 8. Zus. zuerst bewiesen wird. Bedeutet also A das Parallelepipedum AG der 118. F. und D den Würfel dessen Seite AK ist,

so

so ist $\alpha = \beta = \gamma$; und das Parallelepipedum verhält sich zum Würfel wie $abc : \alpha^3$ welches der Satz selbst ist.

58. Satz. Aufg.

Ein schiefes Parallelepipedum 112. F. auszurechnen.

Aufl. Von einem willkührlichen Puncte c seiner obern Grundfläche fälle man auf die Ebene der untern AC; ein Loth cM. Man messe dieses, und finde den Inhalt der Grundfläche in Quadraten eben dieses Maasses; das Product aus dem Innhalte der Grundfläche in die Höhe gibt den Innhalt des Parallelepipedi oder die Menge von Würfeln in ihm, die dieses Maaß zur Seite haben. Es ist willkührlich, welche von den sechs Flächen man zur Grundfläche nehmen will.

Exempel. Es sey $cM = 7°$; $DC = 9'$ und ein Perpendikel von A auf DC sey $= 5'\ 7''$ so setzt man $cM = 700''$; $DC = 90''$ und den Inhalt der Grundfläche $ABCD = 57.\ 90 = 5130$. Quadratzoll; also des Körpers Inhalt $= 5130.\ 700 = 3591000$. Cubikzoll $= 3591$. Cubikfuß $= 3$ Cubikruthen, 591. Cubikfuß. Oder nach den zehntheilichten Brüchen kömmt die Ruthe $= 1$ gesetzt; der körperliche Inhalt $= 0,\ 9.0,\ 57.\ 7 = 3,591$. wie vorhin. Wäre das Maaß zwölftheilichtes gewesen, so hätte man alles auf Zolle so bringen müssen, daß der Inhalt $= 9.\ 12.\ (5.\ 12 + 7).\ 7.\ 12.\ 12$ gekommen wäre.

1. Zus.

1. Zus. Die Höhen von zweyen Parallelepipedis seyn a; α, ihre Grundflächen, dem Inhalte nach, wie die Aufgabe lehret, berechnet = b, β; so sind die körperlichen Räume a b; α β, in der Verhältniß a: α + b: β.

2. Zus. Sind beyde Parallelepipeda gleich, so ist a: α = β: b.

3. Zus. Ist a = α; so ist die Verhältniß der Räume = β: b; oder = a: α wenn b = β.

60. S. Lehrsatz.

Ein dreyeckigtes Prisma FCGHBE 118. F. ist halb so groß als ein Parallelepipedum, das mit ihm einerley Höhe, und eine noch einmahl so grosse Grundfläche hat.

Bew. Man ziehe FD, CD, mit CG, FG, und EA, BA, mit BH, EH, parallel, so entstehen zwey Parallelogrammen GD, HA; von denen des Prisma Grundflächen die Hälften sind. Nun sind FG, EH; (II. Th. 4. Erkl.) und verm. der Verzeichnung DC, FG, also auch DC, EH (46. S. 1. Z.) folglich auch DC, AB; und eben so, DF, AE, also AD; BC; FE, GH gleich und parallel; 12. S. 3. Z.) und DB, FH; DE, CH; gleiche und parallele Parallelogrammen, (53 S. 4. Z.) also machen DB und EG, mit der Ebene FB gleiche Winkel (47. S. 6. Z). Man lege also das Prisma FCDABE dergestalt auf das andere, daß die Fläche FCBE auf sich selbst, nur in verkehrter

Lage, nähmlich C, F, E, B, auf F, C, B, E, fällt, so fällt die FEAD in die Ebene CBHG, (47. S. 5 Z.) und die genannten Puncte fallen in dieser Ordnung auf einander; d. i. beyde Prismata decken einander; daß sie aber aneinander gesetzt ein Parallelepipedum ausmachen, erhellt aus dem bisherigen Beweise selbst.

1. Zus. Ein dreyeckichtes Prisma auszurechnen, multiplicire man seine Höhe mit seiner Grundfläche; dem △EHB denn dieses gibt halb so viel als eben die Höhe mit EHBA multiplicirt, und das letzte Product gäbe das Parallelepipedum, dessen Hälfte das Prisma ist.

2. Zus. PQRST tsrqp sey ein vieleckichtes Prisma 119. F. Man ziehe in seinen beyden Grundflächen aus ähnlichliegenden Puncten R, r, Diagonalen RP, RT, rp, rt; jede zwo, die nach ähnlich liegenden Puncten in beyden Grundflächen zu gehen, sind parallel, nähmlich RP, RT mit rp; rt; weil alle Seiten des Prisma parallel und gleich sind (53. S). Folglich geben die Diagonalflächen Rp; Rt, mit den Seitenflächen, soviel dreyeckichte Prismata, soviel Dreyecke die Diagonallinien, in jeder Grundfläche geben. Also läßt sich ein vieleckichtes Prisma in lauter dreyeckichte theilen, die alle eine Höhe haben.

3. Zus. Diese dreyeckichten liessen sich einzeln berechnen, und ihre Summe gäbe den Innhalt des vieleckichten. Man findet diesen aber auf einmahl,

wenn

wenn man die Summe aller ihrer Grundflächen, d. i. die ganze Grundfläche des vieleckichten, in die gemeinschaftliche Höhe multipliciret.

4. Zus. Der Innhalt eines Cylinders ist ein Product aus seiner Höhe in seine Grundfläche (41. S. 3. Zus.).

5. Zus. Die Summe der Seitenflächen P q; Q r; R s, S t, T p, findet sich, wenn man diese Parallelogrammen einzeln ausrechnet und zusammen addirt. Ist es ein senkrechtes Prisma, so sind die Seitenflächen Rechtecke alle von einer Höhe (53. S. 2. Z.) und ihre Summe ist ein Product aus dieser gemeinschaftlichen Höhe in die Summe aller Grundlinien p q + q r + r s + s t + t p; d. i. in dem Umfang der Grundfläche.

6. Zus. Die runde Seitenfläche eines senkrechten Cylinders (53. S. 11. Z.) ist ein Product aus seiner Höhe in den Umfang seiner Grundfläche (53. S. 12. Z. und 41. S. 4. Z.). Wenn also die Höhe = b; der Durchmesser = d ist, so ist die krumme Seitenfläche = b d P (44. S.); und der körperliche Inhalt = $\frac{b\,d^2.P}{4}$. Die krumme Fläche, versteht sich, ohne die beyden Grundflächen, die als Ebenen, nach 44. S. berechnet werden.

7. Zus. Stünde über dem Kreise P O 68. F. ein senkrechter oder schiefer Cylinder, und über N Q ein anderer, der mit jenem einerley Axe hätte; und wäre ihre gemeinschaftliche Höhe = b; so wäre der inne-

re = b r². P der äusere b. R². P (44. S. 10. Z.) Wenn man also den innern aushöhlte, so wäre der übrigbleibende cylindrische Ring = b P. ($R^2 - r^2$) Es erhellet, daß man auf gleiche Art ein hohles Prisma durch ein Product aus seiner Höhe in den noch übrigen vollen Theil der Grundfläche berechnet.

8. Zus. Ein anderer Cylinder, dessen Höhe β, der Durchmesser δ wäre, bekäme zum Innhalte $\frac{\beta \delta^2 . P}{4}$ also stünden die beyden (6. und 8. Z.) in der Verhältniß b d d : β δ δ = (b : β) + (d d : δ δ).

9. Zus. Sind sie gleich, so ist b : β = δ δ : d d.

10. Zus. Sind die Höhen gleich, so ist der Cylinder Verhältniß = d d : δ δ; einerley mit der Verhältniß ihrer Grundflächen (44. S. 11. Z.).

11. Zus. Der beyden Cylinder (6. und 10. Z.) Summe ist $\frac{b . P}{4}$. (d d + δ δ) = einen Cylinder dessen Durchmesser = r (d d + δ δ) oder dessen Grundfläche die Summe jener beyden Grundflächen wäre. (44. S. 2. Z.).

12. Zus. Hierauf gründet sich die Verfertigung des Visirstabes. Ein Cylinder von der Höhe K L; dem Durchmesser L M 120. F. halte ein gewisses Maaß, z. E. eine Kanne. Man nehme auf einem rechten Winkel; A B = A 1 = L M so ist B 1; der Durchmesser eines cylindrischen Gefässes, das unter eben der Höhe K L; zwo Kannen hält; Man

nehme

nehme A 2 = B 1; A 3 = B 2; A 4 = B 3; u. s. w. so sind A 3; A 4; u. s. w. Durchmesser von Gefässen, die unter eben der Höhe 3; 4; 5; u. s. w. Kannen halten.

13. Zus. Den Inhalt des Cylinders NOP zu finden; suche man mit dem Visirstabe, wieviel Kannen auf seiner Grundfläche in der Höhe OQ = KL, stehen können; diese Zahl nehme man so vielmahl, als die Höhe OQ in der Höhe ON enthalten ist.

Anm. Ein Faß ACabDB 121. F. fällt zwischen zweene Cylinder von gleicher Länge Aa; deren einer die Boden des Fasses zu Grundflächen, also AB = ab zu Durchmessern hat, des andern Durchmesser ist die Spundtiefe CD = EF = ef; Beyde lassen sich aus 13. Zus. finden; und man kann annehmen, das Faß sey das arithmetische Mittel zwischen beyden; ob sich dieses gleich nicht erweisen läßt, weil das Faß unzählige Gestalten haben kann, bey denen die Puncte A; C; a; b; D; B; unverrückt bleiben. Genauere Bestimmungen lassen sich aus der Algebra finden, wenn die völlige Gestalt des Fasses als gegeben angesehen wird. Man hat auch Visirstäbe, die sogleich ohne Rechnung den Inhalt des Fasses angeben; sie setzen aber gewisse Verhältnisse der Durchmesser eines Fasses zum voraus, und sind also nur an einem Orte, wo Fässer nach diesen Verhältnissen gebunden werden, zu gebrauchen. Fässer, die nicht voll sind, zu visiren, lehret ebenfalls die Algebra.

61. Satz. Lehrs.

Wenn eine Pyramide ABGD, 122. F. mit einer Ebene der Grundfläche BGD parallel geschnitten wird, so ist der Schnitt PKT der Grundfläche ähnlich.

Bew. In jeder Seitenfläche der Pyramide wie ABG; geht die Seite des Durchschnittes PK mit der Seite der Grundfläche BG, parallel (II. Th. 2. Erkl. Zus.) also machen zwo zusammenstossende Seiten des Durchschnittes PK; KT, eben den Winkel PKT; den die unter ihnen liegenden beyden Seiten BG; GD, der Grundfläche machen. (46. S. 2. Z.). Es ist ferner PK:BG = AK:AG = KT:GD (26. S.) also PK:KT = BG:GD; Also folgen proportionirte Seiten, und gleiche Winkel in einerley Ordnung im Schnitte und in der Grundfläche, d. i. beyde Figuren sind ähnlich.

1. Zus. Man lasse von der Spitze A auf die Grundfläche das Loth AC herab, welches auf dem Schnitte in Z auch senkrecht stehet (46. S. 10. Z.) BC; PZ, sind der Ebene BAC Durchschnitte mit den beyden parallelen Ebenen, und also parallel, (II. Th. 2. Erkl. Zus.) und AZ:AC = AP:AB = AK:AG = PK:BG.

2. Zus. Es sey AZ = x; AC = f; die Fläche des Schnittes PKT = S die Grundfläche BCD = B; so ist B:S = BGq:PKq (42. S. 22. Z.) = f^2: x^2 (1. Z.) oder $S = \frac{Bx^2}{ff}$.

3. Zus. Es sey pkt ein anderer Durchschnitt, dessen Innhalt = s und seine Entfernung von der Spitze sey Az = x + e; so ist $s = B. \frac{(x+e)^2}{ff}$, wo Zz = e.

4. Zus.

4. Zus. Im Kegel 125. F. sey AC die Axe und CB der Grundfläche Halbmesser; durch einen willkührlichen Punct der Axe Z lege man eine Ebene mit der Grundfläche parallel, so wird derselben Durchschnitt PZ mit der Ebene BCA; dem Halbmesser BC parallel seyn (II. Th. 2. Erkl. Zus.). Also ist AC: AZ = BC : PZ. Nun kan B jeden Punct in der Grundfläche Umkreise bedeuten, und die Längen der Linien AC, AZ, BC, bleiben allemahl einerley: folglich behält auch PZ einerley Länge, d. i. wenn von des Kegels Spitze nach jeden Puncte im Umfange der Grundfläche eine gerade Linie gezogen wird, deren Puncte alle also in der Fläche des Kegels liegen, so ist der Punct dieser Linie, der in der Ebene durch Z lieget, im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunct Z ist. Dieser Kreis geht also durch alle Puncte der Kegelfläche, die in der Ebene durch Z liegen, d. i. er ist dieser Ebene Durchschnitt mit der Kegelfläche. Alle Querschnitte des Kegels sind also Kreise, deren Mittelpuncte in der Axe liegen. Im senkrechten Kegel sind PZC, ACB rechte Winkel; (46. S. 10. Z.) und er entstehet also, indem sich das rechtwinklichte Dreyeck ABC, um AC drehet.

Eine Linie wie AB heißt des Kegels Seite. Im senkrechten Kegel ist sie $= r$ (ACq + BCq) und also von unveränderlicher Länge, B mag ein Punct des Umkreises seyn welcher es will. Im schiefen aber ist von dem Puncte, wo das Loth von der Spitze in die Grundfläche trifft, nicht an alle

Puncte des Umkreises gleich weit. Daher heißt jener Kegel auch **gleichseitig** (aequilaterus) dieser **ungleichseitig** (scalenus). In jenem nähmlich ist A wie der Pol der Grundfläche und jedes ihr parallelen Kreises (49. S. 9. Z.). Wenn B b ein unendlich kleiner Bogen ist, so ist A B b eine unendlich schmahle Ebene, dergleichen unzählig viele ringsherum die Kegelfläche ausmachen. Also ist der Kegel eine Pyramide von unzählig viel Seiten.

Wenn die Lage der Linie C A. und der Halbmesser der Grundfläche ungeändert bleiben, der Punct A aber sich immer weiter und weiter von C entfernt, so kommen die Linien C A, B A, Parallelen immer näher und näher, (wie 12. S. 12. Z.) werden sie völlig parallel, so verwandelt sich der Kegel in einen Cylinder (53. S. 8. Z.) den man also als einen Kegel, dessen Axe unendlich ist, ansehen kann.

5. Zus. Das Pyramidenstücke K P T t k p ist grösser als ein Prisma, dessen Grundfläche P K T, kleiner als eines, dessen Grundfläche p k t wäre, wenn beyde e zur Höhe hätten. Also ist seine Grösse von jeder dieser Prismatum weniger unterschieden, als diese Prismata selbst unterschieden sind. Nun sind diese beyden Prismata e. S. und e. s, also ihr Unterschied e. (s − S) welcher sich zu dem kleinsten e. S. wie s − S: S verhält; d. i. wie $\frac{B.(x+e)^2 - x^2)}{f^2} : \frac{Bx^2}{f^2}$ (2. Z.) $= (2x+e).\ e : x^2$ (Arithm. IIII. 1. und V. 21.) weil nun $2x + e$ immer weniger und weniger von $2x$ unterschieden ist, je kleiner man e annimmt, so

kann

kann des ersten Gliedes erster Factor der Grösse 2x; und die Verhältniß selbst der Verhältniß 2xe: xx = 2e: x so nahe kommen als man will; Aber eben die Veränderung von e, macht auch, daß in der Verhältniß 2e: x das erste Glied in Vergleichung mit dem andern immer weniger und weniger beträchtlich wird; und weil e immer abnehmen kann, ohne daß sich x ändert, so kann e in Vergleichung mit x geringer werden als jede andere Grösse, die sich mit x vergleichen läßt; d. i. es kann wie unendlich klein oder als nichts in Vergleichung mit x angesehen werden; Also kann man e allemahl so klein annehmen, daß der Unterschied beyder Prismatum in Vergleichung mit dem kleinsten, für nichts zu achten ist: folglich wird er in diesem Falle auch in Vergleichung mit dem Pyramidenstücke für nichts zu achten seyn; d. i. man kann, welches Prisma von beyden man will, für das Pyramidenstück annehmen, und solches also = e. $S = \frac{Bx^2}{ff}$. e setzen, ohne daß der Fehler, den man dadurch begehet, indem man solchergestalt für das Pyramidenstück etwas kleineres setzt, mit der Grösse, die man bestimmen will, mit dem Pyramidenstücke, in einige Vergleichung käme; Hiezu wird nur erfodert e kleiner als jede Grösse die sich bestimmen läßt; d. i. pkt unendlich nahe bey PKT anzunehmen. Und so wird begreiflich werden, daß man sich die Höhe AC in eine unzählige Menge unendlich kleiner Theile getheilet, und durch alle diese Theilungspuncte Ebenen gelegt vorstellen kann;

da allemahl die beyden nächsten ein Pyramidenstück zwischen sich enthalten werden, das man für ein Prisma annehmen darf. Alle diese Primata zusammen machen also die Pyramide aus. Aber die Art ihre Summe zu finden, da sie beständig um unendlich kleine Unterschiede, von der Spitze herab grösser werden, läßt sich aus den bisherigen Gründen nicht erklären; daher muß ich diese Begriffe auf eine andere Art anwenden, die Ausrechnung der Pyramide daraus herzuleiten.

62. Satz. Lehrsatz.

Gleich hohe Pyramiden und Kegel über einer Grundfläche sind gleichen Inhaltes.

Bew. Ueber der Grundfläche $\beta\gamma\delta$ die der BGD gleich und ähnlich ist, stehe eine Pyramide, deren Spitze x von der Grundfläche um die Höhe AC entfernt sey; Man setze beyde Grundflächen in eine Ebene an einander oder auf einander, und lasse die Ebenen PKT, pkt, in der andern Pyramide die Schnitte ΠKT; $\pi\varkappa\tau$, machen, deren Entfernung auch e seyn wird; und die ein Pyramidenstück = e.

ΠKT geben werden (61.S.). Aber $\Pi KT = \frac{Bxx}{ff}$ weil sich hier alle die Schlüsse vollkommen anbringen lassen, die man bey PKT gemacht hat; Also sind beyde Pyramidenstücke gleich. Da nun jedes e zwey solche gleiche Stücken gibt, und in beyder Pyramiden Höhen gleichviel e genommen werden können,

nen, wenn die Höhen gleich sind, so sind beyde Pyramiden, Summen gleichgrosser und gleichvieler Stücken, d. i. gleichen Inhaltes.

63. Satz. Lehrsatz.

Ein dreyeckichtes Prisma ABCFED 123. F. läßt sich in drey Pyramiden gleichen Inhalts theilen;

Bew. Man schneide es durch CDA und CDE; So entstehen die Pyramiden ABCD; CDEA; ECDF; die erste und zweyte haben gleiche und ähnliche Grundflächen BAD; ADE; und die Spitzen beysammen in C; die zweyte und dritte; gleiche und ähnliche Grundflächen ACE, FEC, und die Spitzen beysammen in D; also sind alle drey gleich (62 S.).

1. Zus. Ueber jedem Dreyecke BGD 122. F. lassen sich eine Pyramide und ein Prisma von gleicher Höhe (53. S.) aufrichten; von dem also die Pyramide ein Drittheil ist. Folglich ist jeder dreyeckichten Pyramide ABGD Inhalt $= \frac{1}{3}$ B. f (62. S.).

2. Zus. Eine vieleckichte Pyramide ABCDEF 124. F. wird in so viel dreyeckichte an einer Spitze ABCD; ADEF; ABDF; zertheilet, so viel Dreyecke sich in der Grundfläche durch Diagonalen aus einem Puncte machen lassen; Heißt also ihre gemeinschaftliche Höhe, oder ein Perpendikel AR von A auf die ganze Grundfläche wieder f, so ist die Summe dieser einzelnen Pyramiden, oder die ganze $= \frac{1}{3}$ f. ($\triangle$BCD + $\triangle$DEF + $\triangle$BDF) $= \frac{1}{3}$ f. BCDEF.

3. Zus.

3. Zus. Ein Kegel 125. F. dessen Höhe = f der Grundfläche Durchmesser = d ist, hat zum Inhalte $\frac{1}{3}$ f. $\frac{d^2 P}{4}$ (44. S.).

4. Zus. Die abgekürzte Pyramide BPTDGK; 122. F. ist = $\frac{1}{3}$ f. B − $\frac{1}{3}$ x. S (3. Zus. und 62. S. 2. Zus.) = $\frac{1}{3}$. fB − $\frac{1}{3}$ x. $\frac{Bx^2}{ff}$ (63. S. 2. Z.) = $\frac{1}{3}$ B. $(f - \frac{x^2}{ff} x)$; Wenn aber das obere Stück APKT der Pyramide fehlt, so kann man x nicht unmittelbar messen. Den Abstand der obern Fläche von der untern, oder die Höhe des Pyramidenstücks, wird man wissen können; Sie sey CZ = y. Man suche also aus dem gefundenen Ausdrucke f, x, wegzuschaffen oder diese Grössen durch B, S, y, auszudrücken, weil man diese drey letztern, bey jedem vorkommenden Pyramidenstücke leicht messen kann.

Nun ist $\frac{x^2}{f^2} = \frac{S}{B}$ (61. S. 2. Z.) also $\frac{x}{f} = \frac{r S}{r B}$

(Ar. IIII. 45.) oder $x = \frac{f r S}{r B} = f - y$, folglich mit $r B$ multiplicirt; $f r S = f r B - y r B$; und $y r B$ auf beyden Seiten addirt, aber $f r S$ abgezogen; $y r B = f r B - f r S = f. (r B - r S)$

daher $\frac{y r B}{r B - r S} = f$, und $x = \frac{y r B}{r B - r S} \cdot \frac{r S}{r B}$

=

$= \frac{y r S}{r B - r S}$; Also verwandelt sich $f - \frac{x^2}{f^2} . x$ in $\frac{y r B}{r B - r S} - \frac{S}{B} . \frac{y r S}{r B - r S}$ das ist diese beyden Brüche auf einerley Benennung gebracht in $\frac{y B r B - y S r S}{B . (r B - r S)}$ oder in $\frac{y . (B r B - S r S)}{B . (r B - r S)}$; dieses also, mit $\frac{1}{3} B$ multiplicirt, giebt den Innhalt des Pyramidenstücks $= \frac{1}{3} y . \frac{B r B - S r S}{r B - r S}$.

Man könnte schon diesen Ausdruck gebrauchen. Er läßt sich aber noch etwas bequemer einrichten, wenn man aus dem Factor der in $\frac{1}{3} y$ multiplicirt ist, das Irrationale des Nenners wegschafft, weil mit Irrationalzahlen zu dividiren noch viel beschwerlicher ist, als damit zu multipliciren. Das wird geschehen, wenn man des erwähnten Factors Nenner mit $r B + r S$ multiplicirt, denn da wird aus ihm $B - S$ (Ar. II. 5). Man muß aber alsdenn eben damit auch den Zähler multipliciren. Man verrichte also diese Multiplication

$B r B - S r S$	mult. mit
$r B + r S$	giebt
$B^2 - S r B r S + B r B r S - S^2$	

Aber $r B . r S = r B . S$ (Ar. II. 15.) also ist das nur gefundene Product $= B^2 - S^2 + (B - S) . r B S$ und weil $B^2 - S^2 = (B + S) . (B - S)$ (Ar. II. 5.)

so

so wird eben dieß nur gefundene Product $=(B+S+\sqrt{}B.S).(B-S)$ daher läßt sich der in $\frac{1}{3}y$ multiplicirte Factor, so ausdrucken: $\frac{(B+S+\sqrt{}B.S).(B-S)}{B-S}$ und der Ausdruck des Pyramidenstücks wird $\frac{1}{3}y.(B+S+\sqrt{}B.S)$.

Da nun die beyden Grundflächen B, S, bey einem vorgegebenen Pyramidenstücke, sich ausrechnen lassen, so kann man aus ihren Producte die Quadratwurzel ziehen, diese zur Summe addiren, und alles zusammen in $\frac{1}{3}y$ multipliciren.

So hat Jacob Bernoulli diese Berechnung schon 1687. vorgetragen. Op. Jac. Bern. T. I. p. 311. Mir ist noch eine andere Einrichtung dieser Formel beygefallen, welche die Bequemlichkeit hat, daß man keine Quadratwurzel dabey ausziehen darf. Man nehme ein paar auf ähnliche Art bestimmte Linien (42. S. 23. Z.) in beyden Grundflächen; Dergleichen wären ZP, CB 122. F. wenn man wüßte daß ein Loth von der Spitze der Pyramide die Grundflächen in Z; C, schnitte; Am natürlichsten ist es ein paar ähnlichliegende Seiten z. E. PK, BG, dazu zu wählen. Diese kann man, wenn das Pyramidenstück vorgegeben wird, gewiß messen, und die untere Grundfläche auch. Die beyden Linien mögen n in der obern, m in der untern heissen; so ist (42. S. 22. 23. Z.) $B : S = m^2 : n^2$ also

$S=\frac{n^2 B}{m^2}$ und $B.S=\frac{n^2 B^2}{m^2}$ und (Ar. I. 77.)

$\sqrt{}B.S=$

$\sqrt{r}\,B.S = \frac{nB}{m}$; also das Pyramidenstück $= \frac{1}{3}y.$

$$(B + \frac{n^2}{m^2}.B + \frac{n}{m}B) = \frac{1}{3}yB.(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}).$$

5. Zus. Bey einem senkrechten Kegel 125. F. sind Z, C, der beyden Grundflächen Mittelpuncte, und $CB = R$; $ZP = r$, ihre Halbmesser; auch ist $B = R^2.P$; $S = r^2.P$ (44. S.) folglich $B.S = R^2.P.r^2.P = R^2.r^2.P^2$ daraus die Quadratwurzel $= R.r.P$ (Ar. II. 15.) also der abgekürzte Kegel $= \frac{1}{3}y.(R^2P + r^2P + RrP) = \frac{1}{3}y.P.(R^2 + Rr + r^2)$.

Anm. Eine gemeine Regel abgekürzte Pyramiden zu berechnen, giebt für derselben Innhalt $\frac{B+S}{2}.y$ an; wieviel dieser falsche Innhalt den wahren übertrifft, läßt sich so berechnen

der falsche	$\frac{1}{2}By + \frac{1}{2}Sy$
der wahre	$\frac{1}{3}By + \frac{1}{3}Sy + \frac{1}{3}y.\sqrt{r}BS$
Ueberschuß des falschen	$\frac{1}{6}By + \frac{1}{6}Sy - \frac{1}{3}y\sqrt{r}BS$
oder	$\frac{1}{3}y\left(\frac{B+S}{2} - \sqrt{r}BS\right)$

Daß $2\sqrt{r}SB < B+S$ und also der falsche Innhalt grösser ist, erhellt daraus weil $(\sqrt{r}B - \sqrt{r}S)^2 = B - 2\sqrt{r}BS + S$ Nun wäre das Quadrat von $\sqrt{r}B - \sqrt{r}S$ bejaht, wenn gleich seine Wurzel verneint wäre (Ar. I. 105.) (hier ist aber auch die Wurzel bejaht weil $S < B$.) Folglich muß dieses Quadrats verneinter Theil kleiner als sein bejahter oder $2\sqrt{r}BS < B + S$ seyn.

Für

Für $S = B$ ist der Fehler $= \frac{1}{3} y. \left(\frac{B+B}{2} - r B.B\right)$ $= o$ aber für $S = o$ wenn nähmlich das Pyramidenstück sich in die ganze Pyramide verwandelt und $y = f$, wird er $\frac{1}{3} f. \frac{1}{2} B.$ Der Fehler ist also wie sich durch die Differentialrechnung umständlicher zeigen läßt, nur klein, wenn R und S wenig unterschieden sind oder das Pyramidenstück nicht hoch ist, er wird immer grösser, je grösser die Höhe des Stücks in Vergleichung mit der Höhe der ganzen Pyramide wird, und kann so bis zur Hälfte der ganzen anwachsen.

Abgekürzte Pyramiden zu berechnen, kömmt unter andern in der Fortification vor, wenn man den körperlichen Innhalt der Vestungswerke wissen will. Daß Schildknecht I. Th. 6. E. über diejenigen lacht die hier gar zu genau rechnen, ist diesem lustigen Schriftsteller leicht zu verzeihen und hat etwas wahres zum Grunde; wobey er doch bedenken sollen, daß man eine Regel deren Falschheit man zugiebt, nur alsdenn brauchen darf, wenn man sicher ist daß sie nicht mehr fehlt als man sich zu fehlen verstatten will: daß aber noch jetzo auch Lehrer der Mathematik die nur angezeigte falsche Berechnung vortragen, und wohl der wahren als gleichgültig ansehen, ist destoweniger zu entschuldigen, weil eine leichte Probe ihnen beyder Unterschied könnte gewiesen haben, und nach Jacob Bernoulli auch L. Ch. Sturm deswegen in seinen Schriften Erinnerungen gethan hat.

64. Satz. Aufg.

Einer Pyramide 124. F. Seitenflächen auszurechnen.

Auflös. Weil es Dreyecke ABC; ACD, u. s. f. sind, so lasse man von der Spitze A auf jedes Grundlinie wie BC; CD; Perpendikel wie AP, AQ so ist

des

des einen Innhalt $= \frac{AP.BC}{2}$ und so berechnet man jedes Dreyeck einzeln, und bringet sie in eine Summe.

1. Zus. Wenn alle Perpendikel AP, AQ, u. s. w. gleich sind, und jedes $= k$ gesetzt wird, der Umfang der Grundfläche aber oder $BC + CD + DE$ u. s. w. $= p$ ist, so betragen die Seitenflächen der Pyramiden zusammen $\frac{1}{2}kp$.

2. Zus. Dieses geschiehet, wenn alle Seitenflächen gegen die Grundfläche gleichviel geneigt sind Denn AR sey auf die Grundfläche senkrecht; so sind APR, AQR, der Seitenflächen ABC, ACD, Neigungswinkel (46. S. 6. Z.) Sind sie also gleich, so sind auch die Winkel QAR; PAR, und daher wegen der gemeinschaftlichen Seite AR, die Dreyecke PAR; QAR gleich (3. S.).

3. Zus. In diesem Falle sind R der Mittelpunct und RP der Halbmesser eines Kreises der alle Seiten der Grundfläche berühret. Werden also diese Seiten unendlich klein angenommen, so fallen sie in den Umfang dieses Kreises (19. S. 4. Z.) und die Pyramide wird ein senkrechter Kegel (141. F.) dessen krumme Fläche also $= \frac{kdP}{2}$ (63. S. 3. Z.) wird, wo $k = r(ff + \frac{1}{4}dd)$. Die Grundfläche wird besonders aus 44. S. berechnet.

Anm. Des ungleichseitigen Kegels (61. S. 4. Z.) Fläche ist nicht so leicht zu finden. Man sehe davon Hrn. Eulers Abhandlung Comm. Nou. Petrop. T. I. p. 4.

4. Zus. In einem senkrechten Kegel 125. F. sey der Grundfläche Halbmesser $CB = R$, des Querschnittes $PZ = r$; die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise $= 1 : \pi$; die Seite $AP = x$, $PB = e$ so ist die Fläche des Kegels $APT = r\pi x$; $ABD = R.\pi.(x+e)$ ferner ist $BO:BP = PZ:AP$ (63. S. 4. 5. Zus.) oder $R-r:e = r:x$ also $x = \frac{re}{R-r}$ und eben so $BO:BP = BC:BA$ oder $R-r:e = R:x+e$ oder $x+e = \frac{R.e}{R-r}$ also die Fläche der Kegel $APT = \frac{\pi.r^2 e}{R-r}$; $ABC = \frac{\pi.R^2 e}{R-r}$, und beyder Unterschied oder die Fläche des abgekürzten Kegels $= \frac{\pi e.(R^2-r^2)}{R-r} = \pi e.(R+r)$ (Arithm. II. 5. III. Ex.). Ist nun e unendlich klein, so ist $R-r$ ebenfalls unendlich klein, weil $R-r = \frac{re}{x}$; und man kann also setzen $R = r$ und das unendliche schmahle Stück der Kegelfläche ist $= 2\pi eR$.

65. Satz. Aufg.

Die Fläche einer Kugel zu finden 126. F.

Aufl. DEI sey der Halbkreis, aus dessen Herumdrehung die Kugel entstehet, K der Mittelpunct, D, I, mögen der obere und untere Pol der Kugel heissen; DI die Axe der Kugel, E sey ein willkührlicher Punct im beschreibenden Kreise, der, in dem

sich

sich DEI herumdrehet, bis es wieder in die vorige Ebene in D MI kömmt, den halben Kreis EM beschreibet; man begreift leichte, wie bey fernerer Herumdrehung dieser halbe Kreis auf der andern Seite von M bis wieder nach E ergänzet wird. Dem Puncte E liege ein anderer e unendlich nahe, und beschreibe eben so den halben Kreis em; so ist eE ein unendlich kleines Stück einer Tangente an E, (41. S. 5. Z.) und schneidet die Axe verlängert irgendwo in O (19. S. 5. Z.). Man lasse EQ, eq, auf die Axe senkrecht, so werden, indem die Kugel entstehet, von den Dreyecken OQE, Oqe zweene senkrechte Kegel beschrieben (61. S. 4. Z.) die einer ein Theil des andern sind. Die Fläche des obern Kegels OQE von der Fläche des ganzen Oqe weggenommen, läßt die unendlich schmahle Fläche eines abgekürzten Kegels wie 64. S. 4. Z. Es sey also, was dorten R ist, hier QE = y, und das dortige e bedeute hier den unendlich kleinen Bogen Ee so ist diese Fläche = 2 π e y; als das unendlich kleine Stück der Kugelfläche das zwischen den unendlich nahen parallelen Kreisen EME und eme enthalten ist.

Nun ziehe man EF auf eq senkrecht, also mit KQ parallel, so ist KEe = Rect (41. S. 5. Zus.) also QEK + KEF = KEF + FEe oder QEK = FEe und △QEK ∽ △FEe also QE:EK=FE: Ee d. i. y:r=FE:e; oder $e = \frac{r.FE}{y}$. Das Stück

der Kugelfläche ist also $= 2\pi . \frac{r . FE}{y} . y = 2\pi . r .$ FE. Weil nun $FE = Qq$ so stelle man sich die Länge Dq in unzählich viel kleine Theilchen; jedes $= Qq$ getheilet vor; jedem solchen Theilchen wird auf der Kugelfläche ein unendlich schmahles Stücke zugehören, wie hier zwischen EME und eme fällt, und alle diese unendlich schmahle Stückchen der Kugelfläche werden gleich seyn, weil jedes $= 2\pi . r . FE$ ist, und $2\pi . r$ für alle einerley bleibt, auch FE für alle gleich groß angenommen wird; Sie werden also zusammen soviel betragen, als die Summe aller Producte aus $2\pi r$ in FE, d. i. als das Product aus $2\pi r$ in die Summe aller FE oder Qq beträgt. Die Summe aller Qq aber ist Dq oder DQ weil ein Qq mehr oder weniger in Vergleichung mit DQ für nichts geachtet wird. Also ist die Summe aller $2\pi r . FE = 2\pi r .$ DQ; dieses Product also ist die Summe aller der unendlich schmahlen Stückchen der Kugelfläche, die durch alle Qq in welche man DQ theilen kann, bestimmt werden; Aber diese unendlich schmahlen Stückchen, machen zusammen das Stück Kugelfläche aus das zwischen dem Pole D und dem Kreise eme oder EME enthalten ist: dieses also ist $= 2\pi r .$ DQ wo $DQ = r - KQ = r - \sqrt{(r^2 - y^2)}$ und also gegeben ist, wenn der Punct E gegeben ist.

1. Zus. Für die halbe Kugel wird der Bogen $DE = DG = DN = 90°$ und Q fällt in K oder es wird $DQ = DK = r$; Ihre Fläche ist also $2\pi r^2$ und folglich die Fläche der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$.

2. Zus.

2. Zus. Der Umfang des größten Kreises der Kugel DEGINM ist $= 2r\pi$ und seine Fläche $= 2r\pi . \frac{1}{2}r = \pi r^2$; die Kugelfläche ist also viermahl so groß.

3. Zus. Die krumme Fläche eines senkrechten Cylinders, dessen Durchmesser und Höhe der Kugel Durchmesser gleichen, wären $= 2r\pi . 2r$ (60. S. 6. Z.) also der Kugelfläche gleich. Seine Grundflächen nähmlich nicht mit gerechnet.

4. Zus. Die Fläche einer andern Kugel, deren Durchmesser $= R$, wäre $= 4\pi . R^2$; Also die Verhältniß beyder Kugelflächen (1. S. 4. Z.) $= r^2 : R^2$.

5. Zus. Wenn man die Sehne DE ziehet, so ist IED = Rect (21. S. 1. Z.) also IEQ + QED = QED + QDE und IEQ = QDE oder auch EIQ = DEQ also $\triangle$EID $\backsim$ $\triangle$DQE, und DQ : DE = DE : DI; also $DQ = \frac{DEq}{DI} = \frac{DEq}{2r}$; folglich das Stück der Kugelfläche vom Pole bis an EME im Satze $= 2\pi r . \frac{DEq}{2r} = \pi . DEq =$ einem Kreise, dessen Halbmesser DE wäre. Für die ganze Kugel fällt E in I und ihre Fläche ist also einem Kreise gleich, dessen Halbmesser $=$ DI wäre; denn der ist viermahl so groß (44. S. 1. Z.) als ein Kreis vom Halbmesser DK (2. Zus.).

Exempel. Eine Kugel, deren Durchmesser 654000 Toisen wäre, würde nicht viel von der

Erdkugel nach Maupertuis Ausmessungen unterschieden seyn (*). Das Quadrat dieser Zahl $=4\,r^2$, gibt also mit π multiplicirt diese Kugelfläche in Quadrattoisen; oder sie wird $=\pi.\,427716000000$; Wollte man sie in einzelnen Quadrattoisen genau haben, so müßte man wenigstens $\pi=3,141592653589\overset{+11\,-12}{7}$ setzen; weil $4.\ 9=3,6$. Nimmt man aber 1000 Toisen für die Einheit, oder den Durchmesser $=654$ an, so gibt $427716.\ 3,1415926=1343709$ die Kugelfläche richtig in ganzen solchen Quadraten, deren des einen Seite 1000 Toisen, oder das Quadrat eine Million Quadrattoisen hält; daß man also um etwas fehlt, das weniger als eine Million Quadrattoisen beträgt.

66. Satz. Aufgabe.

Den körperlichen Innhalt einer Kugel zu finden.

Aufl. In der 127. F. stelle DEG, den Quadranten DEG der 126. F. vor, und die Puncte, die mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, bedeuten einerley.

(*) Bey den Elemens de Geographie des Hrn. v. M. befindet sich am Ende in der Sammlung: Ouvrages divers de Mr. de Maupertuis (Amst. 1744.). Imgleichen in den Oeuvres de Mr. de Maup. (Dresd. 1752.) 181. S. eine Tafel; die ich aber in der neuesten Ausgabe seiner Werke Oeuvres de Mr. de Maupertuis Lyon 1754. nicht sehe. Aus dieser Tafel kömmt das Mittel zwischen der Erdaxe und ihrem Durchmesser durch den Aequator 654040 Toisen.

ley. Man beschreibe über DK das Quadrat DKGB; und ziehe BK; Indem sich nun der Quadrant herumdrehet und die halbe Kugel beschreibet, so beschreibet das Quadrat einen Cylinder (53. S. 11. Z.) und das Dreyeck einen Kegel (61. S. 4. Z.) dessen Spitze unten im Mittelpuncte stehet. Cylinder und Kegel haben einerley Grundfläche, den Kreis nähmlich, den DB beschreibet; und eine Höhe DK $=r$. Werden nun BK, BG, von QE, qe; in H, h, und L, l, geschnitten, so ist zwischen den Kreisen, deren Halbmesser QE, qe, sind, ein Stück der Kugel enthalten; zwischen den Kreisen, deren Halbmesser QH, qh sind, ein Stück des Kegels, und zwischen denen deren Halbmesser Ql, ql, sind, ein Stück des Cylinders. Die beyden letzten kann man berechnen; liesse sich also das erste mit ihnen vergleichen, so könnte man wenigstens dieses Stück der Kugel finden.

Es ist aber das Kugelstück als ein Stück eines Kegels anzusehen, dessen Grundfläche der Kreis, den qe beschreibet, und die Spitze in O 126. F. wäre (65.). Dieser Kegel wird mit der Grundfläche parallel von dem Kreise, den QE beschreibet, durchschnitten; und der abgekürzte Kegel zwischen beyden Kreisen, ist das Kugelstück; Man kann ihn aber (nach 61. S. 3. Z.) als einen Cylinder ansehen, dessen Grundfläche der Kreis, den QE beschreibt, wäre, weil Qq unendlich klein, und qe unendlich wenig von QE unterschieden ist; also ist er, oder das Kugelstück $= \pi y^2 . Qq$ (60. S. 6. Z.). Eben

das gilt von des Kegels, den DKB beschreibt, Stücke, das zwischen den Kreisen enthalten ist, die QH und qh beschreiben: Es ist nähmlich $= \pi$ QH^2. Qq weil aber DB$=$DK so ist DBK$=$DKB und weil QH, DB parallel sind, auch QHK$=$DBK$=$DKB, also QH$=$QK; aber QK$^2 + y^2 =$ KE$^2 = r^2$ folglich auch QH$^2 + y^2 = r^2$; also die Summe des Kugelstücks, und des Kegelstücks $= \pi$. Qq. ($y^2 +$ QH^2) $= \pi$. Qq. $r^2 =$ dem Stücke des Cylinders, das zwischen den Kreisen, die QL, ql, beschreiben, enthalten ist. Jedes Qq also, das sich in DK nehmen läßt, gibt ein Kugelstücke, und ein Kegelstücke, die zusammen ein Stück des Cylinders ausmachen: wenn man also DK in unendlich viel Qq theilet, und diese Vergleichung für jeden Theil anstellt, so machen alle Kugelstücken, und alle Kegelstücken zusammen soviel als alle Cylinderstücken. Die ersten aber machen die halbe Kugel aus, die zweyten, den ganzen Kegel, und die dritten den ganzen Cylinder. Es sey also die halbe Kugel $= \frac{1}{2}$S; der Kegel $=$k, der Cylinder $=$c; so ist $\frac{1}{2}$ S $+$ k $=$ c oder $\frac{1}{2}$ S $=$ c$-$k; Nun ist c$= \pi r^3$; k$= \frac{1}{3} \pi r^3$ also $\frac{1}{2}$S$= \frac{2}{3} \pi r^3$ oder die Kugel S$= \frac{4}{3} \pi r^3$ oder wenn der Kugel Durchmesser $=$ d$=$ 2r; so ist $d^3 = 8 r^3$, und $S = \frac{\pi d^3}{2.3}$.

1. Zus. Man kann jedes Stück der Kugel, das von D bis an den Kreis, den QE beschreibet, enthalten ist, finden, wenn man von dem Cylinder, der den

Kreis

Kreis mit D B zur Grundfläche und D Q zur Höhe hat, den abgekürzten Kegel zwischen den Kreisen mit D B, Q H, abziehet.

2. Zus. Einer andern Kugel Halbmesser sey = R so ist ihr Innhalt = $\frac{4}{3}\pi . R^3$ welcher sich zum vorigen wie $R^3 : r^3$ verhält. Die Kugeln verhalten sich also wie die Würfel ihrer Halbmesser oder Durchmesser; (sunt in triplicata ratione diametrorum; Ar. VI. 9.).

Anm. Kugeln sind ähnliche Körper, weil sie von ähnlichen Dingen, auf ähnliche Art erzeuget werden. Und der Satz ist allgemein, daß Körper, bey denen das, wodurch sie bestimmt werden, die Grösse ausgenommen, einerley ist, oder ungleiche und ähnliche Körper sich wie die Würfel der Linien verhalten, die in ihnen auf ähnliche Art bestimmt werden. Er sagt von Körpern so etwas wie des 42. S. 22. Z. von Flächen sagte. Aber sein allgemeiner Beweis ist hier zu weitläuftig. Exempel geben ähnliche Parallelepipeda (57. S. 9. Z.) Kegel oder Cylinder (53. S. 8. Z.). Aus diesem Satze zeigt Galiläus was dazu gehört wenn ein menschlicher Körper Riesengrösse haben sollte; Discorsi intorno à due nouve scienze dial. 2. p. 129. Swift läßt die Lilliputer nach eben dem Satze rechnen; Gegentheils hat die Unwissenheit dieser Verhältniß eine höchst ungereimte Berechnung der Grösse eines Riesen in Behrens Hercynia curiosa I. C. 52. S. veranlaßt.

3. Zus. Weil $\frac{1}{3}\pi$ = 1,047197551196597746154 so kann gleich diese Zahl, von der man, nachdem es die Schärfe der Rechnung erfodert, viel oder wenig Zifern nimmt, mit r^3 oder $\frac{1}{8} d^3$ multiplicirt werden. Wer viel Rechnungen dieser Art machen wollte, könnte sich eine Art von Einmahleins für $\frac{1}{3}\pi$ machen, nähmlich die ersten Vielfachen dieser

Zahl, als $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$ u. s. f. durch die Addition finden, da er denn $\frac{1}{3}\pi$ mit einer andern Zahl zu multipliciren, nur für jede Zifer des andern Factors das Product aus diesem Einmahleins nehmen dürfte, und nachdem er es in seine gehörige Stelle geschrieben hätte, alle zusammen addiren müßte.

Weil auch $\frac{1}{6}\pi = 0,523598775...$ so kann diese Zahl mit d^3 multiplicirt werden.

Ex. Für die Kugel im Ex. des 66. S. wäre $S = 279726264.0,523...$ oder über 146 Millionen solcher Würfel, deren jeder 1000 Toisen zur Seite hätte und eine Million Cubiktoisen enthielte; d. i. über 146 Billionen Cubiktoisen.

4. Zus. Weil $6.S = \pi d^3$ so ist $d^3 : S = 6 : \pi = 3 : \frac{1}{2}\pi = 3 : 1,57...$ Diese Verhältniß 300 : 157 wird insgemein die Verhältniß des Würfels vom Durchmesser der Kugel zu ihrem Innhalte genannt. Sie hat, wie in die Augen fällt, keine grosse Schärfe.

5. Zus. Wenn der Durchmesser D einer Kugel gesucht wird, deren Innhalt $= n.S$ seyn soll, so ist $1 : n = d^3 : D^3$ (2. Zus.) also $D = \sqrt[3]{n.d^3}$.

6. Zus. Wenn der Inhalt einer Kugel S gegeben, und ihr Durchmesser d gesucht wird; so ist $d^3 = 6 S.\frac{1}{\pi} = 6.S.0,318...$ (44. S. 5. Z.) aus welcher Zahl die Cubikwurzel gezogen den Durchmesser gibt.

Ex. Sollte die Kugel den sechsten Theil eines Cubikfusses halten, oder $6.S = 1$ seyn, wo die Einheit ein Fuß ist; so wäre $d = \sqrt[3]{0,318...} = 0',6827.$

7. Zus.

7. Zus. $S = 4\pi r^2 . \frac{1}{3} r$ ist die Kugelfläche mit $\frac{1}{3}$ r multiplicirt (65. S. 1. Z.) und also dem Inhalte einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Kugelfläche und die Höhe der Kugel Halbmesser wäre. (63. S. 2. Z.). Man kann nähmlich die Kugelfläche in unendlich kleine Theile theilen, die sich für Ebenen annehmen lassen. Diese kleinen Ebenen, werden Grundflächen unzähliger Pyramiden, die alle ihre Spitzen im Mittelpuncte, und zur Höhe den Halbmesser der Kugel haben. Dieses Verfahren ist für die Kugel, was der 41. S. 4. Z. für den Kreis ist.

8. Zus. Ein Cylinder und ein Kegel, die mit c und k einerley Grundfläche, aber zur Höhe der Kugel Durchmesser hätten, wären doppelt so groß als jene: Sie mögen C, K, heissen, so ist $C = 2c$; $K = 2k$; Aber $S = 4k = 2K$ und $k = \frac{1}{3} c$ also $K = \frac{1}{3} C$ und $S = \frac{2}{3} C$ oder $\frac{3}{2} S = C$ folglich verhalten sich C, S, K wie C; $\frac{2}{3}$C; $\frac{1}{3}$ C; oder wie 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; d. i. wie 3; 2; 1; welches Archimedes erfunden hat.

Anm. Andere Körper als die bisher beschriebenen lassen sich ausrechnen, wenn man sie wenigstens in Stücken abtheilen kann, deren jedes einer von den bisherigen ist. Auser dem gibt es viel Körper, deren Berechnung die höhere Geometrie erfodert, wenn ihre Gränzen durch andere krumme Linien als den Kreis bestimmt werden. Ein allgemeines Verfahren jedes auch noch so unordentlichen Körpers Innhalt vermittelst Wassers oder Sandes zu finden, gehört mehr in die Mechanick als in die Geometrie, und zu seiner Nachahmung lassen sich noch andere, z. E. durch Abwägen erfinden.

Die ebene Trigonometrie.

1. Erklärung.

Die ebene Trigonometrie lehret aus soviel gegebenen Seiten und Winkeln als ein Dreyeck bestimmen; wenn solche in Zahlen gegeben sind, die unbekannten Seiten oder Winkel bey diesem Dreyecke durch Rechnung zu finden.

Zus. Unter den gegebenen muß wenigstens eine Seite seyn. Die Winkel allein bestimmen unzählige ähnliche Dreyecke: (speciem trianguli) (G. 26. S.).

2. Erklärung.

Nach den beyden Endpuncten eines Bogens A, D, sind Halbmesser aus C gezogen, (1. F.) auf den einen Halbmesser C A falle ein Perpendikel D E von dem andern Endpuncte; Dieses heißt des Bogens A D Sinus.

1. Zus. Wenn man es verlängert, bis es den Kreis wieder in F schneidet; so ist E F = D E, (Geomet. 17. S.) und die Bogen D A = A F (G. 22. S. 2. Z.). Der Sinus eines Bogens ist also die halbe Sehne des doppelten Bogens.

Exempel. Wenn der Bogen D A F = 60° also die Sehne D F = C D (G. 23. S. 5. Z.) und D E sin D A = sin 30° oder der Sinus von 30 Graden ist

ist die Hälfte des Halbmessers. Ist DAF = 90 Gr. so ist DF = r 2 CD quad (G. 15. S.) also DE = sin 45 Gr. = ½ r 2. CD quadr.

2. Zus. Des Bogens DHB der über 90° ist Sinus ist auch DE; und zweene Bogen, die zusammen 180 Gr. ausmachen, haben völlig einerley Sinus. Nähme man den Bogen ADHf = BHD = 180° – AD, so würde Bf = AD; und das Perpendikel fe wäre der Bogen Af, Bf Sinus, und weil ACD = BCf (G. 22. S.) so ist fe = DE und Ce = CE (G. 3. S.). Wenn AH = 90°; so ist hier Hf = HD oder AD beträgt soviel unter 90° als Af darüber; Bogen also, die sich auf beyden Seiten des Quadrantens gleichviel von ihm unterscheiden, haben einerley Sinus.

3. Zus. Wenn der Bogen AD bis 90 Gr. wächst, so rückt D nach H, und so F nach h, also die Sehne DF nach dem Halbmesser Hh zu, und wächst (G. 18. S.). Die Sinus von Bogen unter 90 Gr. wachsen also mit ihren Bogen (1. Zus.) bis für AQ = 90 Gr. der Sinus HC dem Halbmesser gleich wird. Für Af > 90 Gr. nehme man Ad = af, so nimmt die Sehne fd immer ab, je grösser Af = Ad wird; die Sinus der Bogen über 90 Gr. nehmen also ab, indem ihre Bogen zunehmen; bis für AHB = AhB = 180 Gr. Sehne und Sinus = o werden. Eben dieses erhellt aus Betrachtung der Dreyecke DCE, fCe, wie auch aus 2. Zus.

4. Zus.

4. Zus. Wenn D C verlängert den Umkreis in d schneidet, so ist d e des Bogens A H B d Sinus; Ein Bogen über 180° hat also einen Sinus, welcher so groß ist als der Sinus des Bogens unter 180 Gr. um welchen jener Bogen 180 Gr. übertrifft; Nähmlich B d = A D. Eben dieß gilt für den Bogen A B H F der über 3. 90 oder 270 Gr. ist; und F E = f e = D E = sin B H D zum Sinus hat, wie B h F sein Ueberschuß über 180 Gr. = B H D ist.

5. Zus. Die Sinus aller Bogen unter 360° sind also kleiner als der Halbmesser; den Sinus H C von 90 Gr. und den h C von 270 Gr. ausgenommen; Sie wachsen von o bis 90 Gr; nehmen von 90 bis 180 Gr. wieder ab, wo sie = o werden, wachsen wieder von 180° bis 270° und nehmen von 270° bis auf Nichts in 360° ab.

6. Zus. Man kann sie also alle als eigentliche Brüche des Halbmessers ansehen; den man daher sinum totum nennt.

Anm. Wenn zu einem Bogen der ganze Umkreis ein- oder etlichemahl addirt wird, so kömmt ein Bogen über 360 Gr. heraus wie A D B F A D; Es erhellt, daß diese Bogen Sinus von eben der Grösse haben, wie die bisher beschriebenen.

7. Zus. Weil die Sinus zwischen 180 und 360 Gr. auf die entgegengesetzte Seite des Durchmessers A B fallen, so sind sie verneinend (Ar. I. 90.). Eben das erhellt aus der Art, wie sie nach dem 5. Zus entstehen. Die Verschwindung ist ein Uebergang in-

das

das Entgegengesetzte (G. 12. S. 14. Z.). Es sey der Halbmesser oder Sinus totus = r; AD = 30° = Bd = AF; also AHBd = 180° + 30° = 210° und AHBhF = 360° — 30° = 330°; so sind DE = sin 30° = $\frac{1}{2}$r; de = FE oder sin 210° = sin 330° = $-\frac{1}{2}$r.

Das Entgegengesetzte in den beyden Sinussen DE de, kömmt auf ihre Richtungen an, die entgegengesetzt sind, man mag auf jedem von dem Puncte, wo er in AB schneidet, nach dem, wo er in seinen Bogen trifft, oder von diesem nach jenem gehen. Aber diese Richtungen sind bey DE fe, nicht entgegengesetzt, daher haben diese Sinus einerley Zeichen.

8. Zus. Wenn man AH; HB; Bh; hA; den ersten, zweyten, dritten, vierten Quadranten nennt, so sind die Sinus in den ersten beyden bejahend; in den letzten beyden verneinend.

3. Erklärung.

DH (2. Zus.) heißt des Bogens AD **Ergänzung** (complementum); nähmlich zu 90 Gr. und DK = sin DH; des Bogens AD **Cosinus** (sinus complementi).

1. Zus. Weil DK = CE; so ist das Quadrat des Cosinus = r^2 – dem Quadrate des Sinus; daß also der Cosinus gegeben ist, wenn man den Sinus hat. Ingleichen auch AE der Unterschied zwischen dem Halbmesser und Cosinus; welcher der **Quersinus** (sinus versus; sagitta,) heist.

Ex.

Ex. Cosin 30° oder sin 60° $= r\ (r^2 - \frac{1}{4}r^2)$
$= r\,\frac{3}{4}r^2 = \frac{r\,3r^2}{r\,4}$ (Ar. I. 77.) $= \frac{r\,3r^2}{2}$.

2. Zus. Cos Af = Ce = − CE (Ar. I. 90.) oder der Cosinus eines Bogens zwischen 90 und 180 Gr. ist dem Cosinus des Bogens, welcher demselben zu 180 Gr. fehlt, gleich, aber negativ.

3. Zus. Die Cosinus der Bogen unter 90 Gr. nehmen ab, indem ihre Bogen wachsen; verschwinden in C wo Cos 90° = o; und kommen für die Bogen über 90° wieder negativ zum Vorscheine, da sie mit den Bogen zugleich wachsen bis auf 180° wo der Cosinus = − Cos o = − r; Ueber 180° bleiben sie noch verneinend und nehmen ab; bis Cos 270° = o und von dar werden sie wieder bejahend und wachsen, bis Cos 360° = + r. Also sind die Cosinus im ersten und vierten Quadranten bejahend; in den mittlern beyden verneinend.

4. Erklärung.

Die berührende Linie an A, welche von der verlängerten CD in G abgeschnitten wird, oder AG, heißt des Bogens AD Tangente und CG seine Secante.

Exemp. Wenn AD = 45° so ist AG = CA oder Tang 45° = r und CG oder Sec 45° $= r\,2r^2$.

1. Zus. Des Bogens ADf Tangente ist Ag = − AG unter den angenommenen Grössen dieser Bogen (1. Erkl. 2. Zus.); des Bogens ADfd

Tan-

Tangente ist AG selbst wieder; und des Bogens ADfdF Tangente Ag = −AG; oder die Tangenten sind im ersten und dritten Quadranten bejahend; im zweyten und vierten verneinend.

2. Zus. Wenn D nach H zu rückt, so geht G immer weiter von A bis ins unendliche, wenn D in H fällt (G. 12. S. 12. Z.). Die Tangenten wachsen also im ersten Quadranten mit ihren Bogen und es ist Tang $90° = \infty$ (welches Zeichen das Unendliche bedeutet); Im zweyten nehmen die negativen Tangenten ab, indem die Bogen wachsen; bis Tang $180° = 0$ Im dritten wachsen wieder bejahende Tangenten mit ihren Bogen bis Tang $270° = \infty$ und im vierten nehmen verneinende Tangenten bis auf Tang $360° = 0$ ab. Alles dieses hängt mit G. 12. S. 14. Z. zusammen.

3. Zus. Es heisse der Kürze wegen der Bogen $AD = x$; Weil $CE : ED = CA : AG$ so ist Cos $x : \sin x = r : \text{tang}\, x$; oder $\text{tang}\, x = \frac{r . \sin x}{\cos x}$.

4. Zus. Auch hieraus mit 3. Erkl. 2. Zus. und 2. Erkl. 7. Z. und Ar. I. 90. u. f. verglichen folgt der jetzige 2. Zus. z. E. In H und h sind $\cos x = 0$; also Tang $x = \infty$; Nähmlich eine endliche Grösse mit 0 dividirt gibt einen unendlichen Quotienten; das heißt: Indem der Divisor abnimmt und kleiner als jede Grösse wird, die sich angeben läßt, wächst der Quotiente, und übersteigt alle Grössen, die sich angeben lassen.

5. Zus. CE : CD = CA : CG oder cos x : r = r : sec x; Also sind Secante und Tangente durch den Cosinus und Sinus; d. i. durch den Sinus (3. Erkl. 1. Zus.) gegeben. Auch ist sec x = $\frac{r^2}{\text{cos x}}$ (r² + tang x quadr.).

5. Erklärung.

Der Ergänzung DH; (3. Erkl.) Tangente HK 2. Fig. heißt des Bogens AD **Cotangente** und CK die **Cosecante**.

1. Zus. Weil AGC = GCH; so ist AG : CA = CH : HK; oder cot x = $\frac{r^2}{\text{tang x}}$; und ED : CD = CH : CK; oder sin x : r = r : colec x; daß also auch Cotangente und Cosecante durch den Sinus gegeben sind.

2. Zus. Für einen andern Winkel y; ist cot y = $\frac{r^2}{\text{tang y}}$ also cot x : cot y = tang y : tang x.

3. Zus. Die Cotangenten haben also in den verschiedenen Quadranten einerley Zeichen mit den Tangenten.

1. Satz. Lehrsatz.

Die trigonometrischen Linien (2. 3. 4. 5. Erkl.) verhalten sich bey ähnlichen Bogen wie die Halbmesser.

Bew. Mit einem andern willkührlichen Halbmesser Cα 3. F. beschreibe man innerhalb der Schenkel

kel des Winkels ACD den Bogen αδ welcher dem AD ähnlich seyn wird, und ziehe dessen Sinus δε, Cosinus Cε; Tangente αγ, Secante Cγ; So ist (§. 26. S.).

CD : Cδ = DE : δε = CE : Cε und
CA : Cα = AG : αγ = CG : Cγ und
CH : Cη = HK : ηκ = CK : Cκ

1. Zus. Wenn man die beyden Halbmesser Cα, CA, in gleichviel gleiche Theile theilet, die alsdenn nur bey dem größten Halbmesser grösser werden; so bekömmt jede dieser Linien für den Bogen αδ eben so viel Theile als die gleichnahmige für den Bogen AD.

2. Zus. Die Verhältniß jeder dieser Linien gegen den ihr zugehörigen Halbmesser, kömmt blos auf die Grösse des Winkels ACD an, dessen Maaß so wohl der Bogen AD als der αδ ist, wenn man beyde nur als Mengen von Graden betrachtet. (§. 22. S. 6. Z.). Man kann sie also als Linien betrachten, die sich auf diesen Winkel beziehen: Ihre wirklichen Grössen kommen alsdenn auf ihres Halbmessers Grösse an. Wenn nähmlich auf eines gegebenen Winkels Schenkel; CD nach Gefallen angenommen wird, so ist sein Sinus DE für diesen Halbmesser gegeben; Und so gibt sich für einen andern Halbmesser Cδ auf eben dem Schenkel ein anderer Sinus δε. So verhält es sich für beyde Halbmesser mit jeder der übrigen Linien, die alle durch die Sinus bestimmt werden. (4. Erkl. 3. 5. Z. und 5. Erkl. 1. Zus.). Theilt man aber den Halbmesser,

er mag groß oder klein seyn, in einerley Menge von Theilen, so wird jede dieser Linien eine Zahl solcher Theile, welche nur auf den Winkel ankömmt und für alle Halbmesser einerley ist.

Heißt jeder Halbmesser 100; so ist eines Winkels von 30 Gr. Sinus allezeit 50. d. i. wenn $\alpha C \delta = 30$ Gr; so hält DE; 50 solcher Theile dergleichen CA; und $\delta\varepsilon$; 50 dergleichen $C\alpha$; 100 hält.

3. Zus. Bedeutet also nun x den Winkel in Graden ausgedruckt, so sind die Ausdrückungen sin x; cos x; tang x u. s. w. Zahlen, die für jeden Winkel gehören; und einen Halbmesser in eine gewisse Menge von Theilen getheilet zum voraus setzen.

4. Zus. Das bejahende und verneinende dieser Linien wechselt bey ihnen für stumpfe Winkel, und für Winkel, die über 180 Gr. betragen, so ab, wie für die Bogen, die ihre Maasse sind.

2. Satz. Foderung.

Wenn dem Halbmesser eine gewisse Menge gleicher Theile gegeben wird, zu finden, wieviel solcher auf jede der vorgenannten Linien, für jeden Winkel kommen.

1. Anm. Daß die Foderung nichts unmögliches verlanget, erhellet aus 1. S. 2. Z. die Arten aber, sie zu bewerkstelligen, sind entweder zu weitläuftig, als daß sie hier Platz fänden, oder sie setzen Kunstgriffe der Algebra und der Rechnung des Unendlichen zum voraus. Jene findet man in Ioach. Rhetici und Valent. Othonis Opere Palatino de Triangulis; in Stevins Cosmographie I. Th. Gellibrands

librands Trigonometria Britannica; Ozanam Tables des sinus. Wolfs El. Trigon. lat. Cap. 1 Nach ihnen sind Tafeln berechnet worden, welche die Zahlen dieser Linien und ihre Logarithmen, für alle Grade und Minuten des Quadrantens, oder in der Trig. Brit. für alle Grade und Hunderttheile von Graden enthalten. Zu den gegenwärtigen Absichten reichen diese zu; für schärfere astronomische Rechnungen werden noch Theile von Minuten verlangt. Wenn man den grossen Nutzen dieser Tafeln aus dem Gebrauche hat kennen lernen, so wird man diese Arten, sie zu berechnen, in den angeführten oder andern Schriften selbst nachlesen können; Sie beruhen blos auf Sätzen der gemeinen Geometrie, von denen aber viele in nächstvorhergehenden kurzen Anfangsgründen keinen Platz gefunden haben. Die Algebra zeigt selbst bey diesen Berechnungen Vortheile, und gibt Vorschriften, nach denen diese Tafeln viel leichter hätten können berechnet werden. Aus ihr kann man also die Möglichkeit solcher Tafeln allgemeiner übersehen, und selbst ihre Zahlen prüfen; auch sie zu allerley weitern Gebrauche anwenden lernen, da die Berechnung selbst von neuen vorzunehmen, weder eines Menschen Arbeit, noch von einigem Nutzen wäre.

2. Anm. In den gebräuchlichen Tafeln, hat man zu ihrer Berechnung den Halbmesser = 10000000000 angenommen; daher sein Logarithme = 10 wird, und in solchen Theilen des Halbmessers sind alle Linien, die natürlichen Sinus 2c. und ihre Logarithmen die künstlichen Sinus 2c. berechnet worden. Man hat aber in den gemeinen Ausgaben dieser Tafeln von jeder solchergestalt berechneten Linie die letzten drey Zifern weggelassen, d. i. man hat sie nur für den Halbmesser 10000000 mitgetheilet. Die Logarithmen sind ungeändert geblieben, deren Kennziefern also für die Zahlen, neben denen sie stehen, alle zu groß sind. Das gibt in dem trigonometrischen Gebrauche keinen Fehler, wenn mit den Logarithmen allein gerechnet wird, denn da werden sie als Logarithmen der Linien, die

zu gewissen Winkeln gehören, angesehen, und man bekümmert sich gar nicht darum, wie groß diese Linien selbst sind. Aber wenn man die Logarithmen als Logarithmen der neben ihnen stehenden Zahlen ansehen wollte, könnte man in Irrthum verführet werden. In der Trigon. Britann. ist der Halbmesser für die Sinus; hundert Billionen angenommen; die Logarithmen aber sind für den zuerst erwähnten Halbmesser eingerichtet. Übrigens sieht man die Linien, die vorerwähntermassen unter gewissen Umständen verneinend werden, als bejahend an, wenn von ihren Logarithmen die Rede ist, oder, diese Linien haben verneint eben die Logarithmen, die sie bejahend haben. Das verneinende bestehet blos in ihrer Lage, der Logarithme bezieht sich nur auf die Grösse, die auch bey entgegengesetzter Lage einerley bleibt. Sonst werden in der Algebra verneinter Grössen Logarithmen unmöglich.

3. Anm. Die Bequemlichkeit erfodert bey diesen Tafeln, daß die Bogen unter 45. Gr. und ihre Ergänzungen zu 90. Gr. beysammen stehen. Dieses verursacht eine sonderbahre Einrichtung; nähmlich Anfang und Ende ist bey ihnen beydes vorne beysammen, und die Mitte steht auf ihren letzten Blättern.

4. Anm. Es ist falsch, daß insgemein in ihnen die Logarithmen vom Sinus und von der Tangente des Bogens o; auch o angegeben werden. Denn dieses Bogens Sinus und Tangente sind nicht 1. sondern o; für den Halbmesser der Logarithmischen Tafeln, ist des Bogens $0°0'0''0'''0''''4^{V}27^{VI}\ldots$ Sinus oder Tangente = 1; also ihr Logarithme = o. Iac. Bernoull. Op. T. II. p 973.

5. Anm. Der einzige Sinus von 30. Gr.; und die einzige Tangente von 45. Gr. sind Rationalzahlen. Nun stehen in den gewöhnlichen Tafeln 90. 60. Sinus; Tangenten, und Logarithmen für beyde; auch für die gemeinen ersten 10000. Zahlen. Darunter zeigen die Tafeln

nur

nur völlig richtig, den Sinustotus und seinen Logarithmen, die Tangente von 45. Gr. und ihren Logarithmen; den Sinus von 30. Gr. und die Logarithmen von 1, 10, 100, 1000, 10000: das sind 10. völlig wahre Sätze unter 31600 die übrigen 31590. sind alle nur beynahe wahr: Und auf ihnen beruhet die Ausmessung des Himmels und der Erden, und fast die ganze angewandte Mathematik. So richtig ist es, daß wir in unsern sichersten und erhabensten Kenntnissen uns der Wahrheit nur nähern, ohne sie völlig zu erreichen.

Von den rechtwinklichten Dreyecken.

3. Satz. Aufgabe.

In einem rechtwinklichten Dreyecke CDE 2. F. aus der Hypothenuse CD und einer Seite DE, die schiefen Winkel zu finden:

Aufl. $CD : DE = r : \sin DCE$;

und $EDC = 90° - DCE$

oder auch $CD : DE = r : \cos CDE$

Also ist $\sin DCE = \frac{r.DE}{CD}$; $\cos CDE = \frac{r.DE}{CD}$

und wenn man die Logarithmen gebraucht

$l \sin DCE = lr + lDE - lCD = l \cos CDE$.

Exempel. $CD = 5$; $DE = 4$; also $\sin DCE = \frac{10000000.4}{5} = 8000000 = \sin 53° 7' +$ Also

$CDE = 36° 53' —$

In Logarithmen $lr + lDE = 10,6020600$
$lCD = 0,6989700$
$lsin DCE = 9,9030900 = lsin$
$53° 7' +$

Zuf. EC läßt sich aus G. 15. S. finden; hier aber aus dem gefundenen Winkel folgendergestalt:

$r : cos DCE = CD : CE$ oder $CE = \frac{cos DCE . CD}{r}$

und $l cos DCE + lCD - lr = lCE$.

Im Exempel ist $CE = \frac{6001876.5}{10000000} = \frac{30009380}{10000000}$
$= 3,0009380$: Es ist aber eigentlich $CE = 3$ Nähmlich DCE ist etwas weniger als $36° 53'$ Weil man also die Winkel selten völlig genau, so wie sie in den Tafeln stehen, findet, so kann man kleine Fehler begehen, wenn man die Winkel, die in den Tafeln den gesuchten am nächsten kommen, für die wahren annimmt, und daraus weiter schließt. Aufmerksamkeit auf die Umstände muß lehren, ob diese Fehler bey der Absicht, die man hat, beträchtlich werden. Es erhellet aber schon hieraus, daß es zu scharfen Bestimmungen nützlich ist, soviel sich thun läßt, Linien aus Linien ohne die Winkel zu finden, obgleich die Rechnung zuweilen beschwerlicher wird.

4. Satz. Aufgabe.

Im Dreyecke CAG 2. F. aus den beyden Seiten CA, AG, die Winkel zu finden.

Aufl. CA : AG = r : tang ACG oder tang ACG $= \frac{r.\,AG}{CA}$ und l tang ACG = l r + l AG − l CA.

Ex. Wenn CA = 3, AG = 4, so ist tang ACG $= \frac{10000000.4}{3} = 13333333 =$ tang 53° 7′ +

Zus. So wäre um die Hypothenuse zu finden, $CG = \frac{CA.\,sec\ ACG}{r}$ oder weil man nicht in allen Tafeln die Secanten antrift $CG = \frac{CA.r}{cos\ ACG}$ und l CA + l r − l cos ACG = l CA.

Dieses gäbe im Exempel.

l CA + l r = 10,4771212
l cos ACG = 9,7782870

l CA = 0,6988342

Dieser Logarithme unter der Kennzifer 3 aufgesucht (Arithm. V. 31.) gehört zu 4,999 + Es ist aber CA = 5.

Aus Tafeln, wo die Secanten anzutreffen sind, wie Ozanams, findet man $CG = \frac{3.16661458}{10000000}$ = 4,9984374.

5. Satz. Aufgab.

Im Dreyecke ECD, aus der Hypothenuse CD; und einem schiefen Winkel DCE, die Seiten zu finden.

Aufl. r : sin DCE = CD : DE; und r : cos DCE = CD : CE.

6. Satz. Aufgabe.

Aus einer Seite EC und einem schiefen Winkel ECD die andere Seite und die Hypothenuse zu finden.

Aufl. r : tang ECD = EC : ED und cos ECD : r = EC : CD.

1. Anm. Wären EC und EDC gegeben, so fände man ECD = 90° - EDC und brächte also die gegebenen Dinge unter die hier angenommenen Umstände.

2. Anm. Man könnte auch statt der ersten Proportion die brauchen: cos ECD : sin ECD = CE : ED. Wenn es aber angeht, braucht man eine Proportion, in welcher der Halbmesser vorkömmt, welches die Rechnung, mit Zahlen, und mit Logarithmen, verkürzt.

3. Anm. Statt der zweyten Proportion liesse sich auch setzen tang ECD : sec ECD = EC : CD aber auser der Ursache der 2. Anm. findet man die Secanten in wenig Tafeln, und ihre Logarithmen noch weniger.

7. Satz. Aufg.

Zu finden, wieviel ein Winkel ACG der auf dem Papiere vorgezeichnet ist, in Graden hält.

Aufl. Man nehme auf einem seiner Schenkel von einem Maaßstabe, der in 1000 gleiche Theile getheilet ist CG = 1000; und lasse auf den andern das Perpendikel GA herab: dieses messe man nach eben dem Maaßstabe, und suche einen Sinus in den Tafeln (2. S. 2. Anm.) auf, dessen erste drey

Zifern,

Zifern, wenn man die vier letzten abschneidet, die gefundene Grösse dieses Perpendikels anzeigen; So wird dieses Sinus Winkel = A C G seyn.

In der That findet man solchergestalt den Winkel nicht in einzelnen Minuten, aber doch für Winkel vom halben Grade bis auf 50 Gr. auf 4 bis 5 M. genau; und also viel schärfer als mit dem Transporteur; und grössere Winkel wenigstens eben so scharf.

Zus. Auf eine Linie C A an einen Punct C einen Winkel, der in Graden gegeben ist, zu setzen; schneide man von seinem Cosinus und Sinus die letzten vier Zifern ab; und trage von deren Maaßstabe die ersten drey Zifern des Cosinus aus C in A; durch A richte man ein Perpendikel auf, und nehme darauf A G = den ersten drey Zifern des Cosinus.

Von gleichschenklichten Dreyecken.

8. Satz. Aufgabe.

In einem gleichschenklichten Dreyecke L M N 4. F. aus den gegebenen Dingen die gesuchten zu finden.

Aufl. Man lasse aus der Spitze M P auf die Grundlinie senkrecht herab; so ist $LP = \frac{1}{2} LN$; und $LMP = \frac{1}{2} LMN$ (G. 9. S. 5. Z.).

Ferner L M : L P = r : sin L M P; also, wenn der Winkel L M N = u heißt;

$$\text{I; } \sin \tfrac{1}{2}u = \frac{r.\tfrac{1}{2}LN}{LM} \qquad \text{II; } LM = \frac{r.\tfrac{1}{2}LN}{\sin \tfrac{1}{2}u};$$

$$\text{III; } \tfrac{1}{2}LN = \frac{LM.\sin \tfrac{1}{2}u}{r}.$$

Diese drey Formeln dienen, aus den Seiten die Winkel, oder aus den Winkeln und einer Seite die andere zu finden.

9. Satz. Aufgabe.

Die Sehnen aller Winkel von 2 zu 2 Minuten für den Halbmesser der Tafeln zu finden.

Aufl. In der 4 F. ist LN die Sehne vom Winkel u, für den Halbmesser ML; Man setze ML = 10000000 und nehme nach Gefallen einen Winkel $LMP = \tfrac{1}{2}u$ in Graden und Minuten an; so findet sich sein Sinus LP in den Tafeln; den man also verdoppeln kann, die Sehne LN zu finden. Weil in den Tafeln die Winkel um einzelne Minuten wachsen, so wachsen ihre verdoppelten von 2 zu 2 Minuten.

Ex. Wenn $\tfrac{1}{2}u = 15° 7'$ so ist LP = 2607853 und LN = 5215706. = Sehn 30° 14'.

1. Zus. So kann man die Sehnen aller Winkel von geraden Zahlen der Minuten finden: Läßt man die letzten vier Zifern weg, so bekömmt man sie für den Halbmesser 1000, von den Sinussen aber ist es nicht rathsam, sie gleich im Anfange der Rechnung wegzulassen.

2. Zus.

2. Zus. Vermittelst einer Tafel der Sehnen, die man auf diese Art verfertiget hätte, liesse sich ein Winkel L M N folgendergestalt messen. Man nehme auf seinen Schenkeln M L = M N = 1000 und messe die Sehne, die man in der Tafel der Sehnen aufsucht, so findet sich der Winkel: z. E. 30° 14′ wenn sie 521 wäre. Die Erinnerungen des 7. S. sind auch hier in acht zu nehmen.

3. Zus. Die Sehne eines Winkels u; für den Halbmesser 5000000 hat soviel solcher Theile als der Sinus von $\frac{1}{2}$ u für den Halbmesser 10000000 hat. Weil nähmlich 2. sin $\frac{1}{2}$ u = Sehn u; so enthält die Sehne von u noch einmahl so viel 10000000 Theile des Halbmessers als sin $\frac{1}{2}$ u; und folglich, wenn man für sie dem Halbmesser nur 5000000 Theile gibt, von denselben halb soviel als wenn er 10000000 Theile hätte, das ist soviel als sin $\frac{1}{2}$ u, 10000000 Theile enthält. So kann man also für M L = 5000000 die jedem Winkel u zugehörige Sehne L N gleich aus den Sinustafeln finden; Es ist nähmlich sin $\frac{1}{2}$ u, wie er in den Tafeln stehet. Z. E. die Sehne von 50° 30′ für diesen Halbmesser, hat einerley Zahl von Theilen mit sin 25° 15′ oder sie ist 4265687 solcher Theile, dergleichen ihr Halbmesser 5000000 hat. S. Eberhards Beschreibung einer neuen Meßtafel. Halle 1753.

4. Zus. Wenn die Sehnen der Winkel solchergestalt für einen gewissen Halbmesser auf Linien getragen werden; entstehet der geradelinichte Trans-

Transporteur. Man pflegt auch auf ihn die Sehnen nur von 5 zu 5 Graden zu tragen, und die mittlern nach Art des verjüngten Maaßstabes (G. 32. S. 4 Anm.) zu bestimmen; welches bey einem kleinen Halbmesser (der die Sehne von 60 Gr. ist G. 23. S. 5. Z.) keinen merklichen Irrthum gibt.

Allgemeine Auflösungen der Dreyecke.

10. Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke ABC 5 F. verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Bew. Weil man um jedes Dreyeck einen Kreis beschreiben kann (G. 17. S. 1. Z.) so ist in denselbigen (G. 21. S.) $\frac{1}{2}$ BC = sin $\frac{1}{2}$ B c C = sin A; $\frac{1}{2}$ CA = sin $\frac{1}{2}$ C a A = sin B; $\frac{1}{2}$ AB = sin $\frac{1}{2}$ A b B = sin $\frac{1}{2}$ C; alle Sinus für den Halbmesser des Kreises. Folglich $\frac{1}{2}$ BC : $\frac{1}{2}$ CA = sin A : sin B oder BC : CA = sin A : sin B, und eben so BC : AB = sin A : sin C und CA : AB = sin B : sin C.

11. Satz. Aufgabe.

Aus einer Seite AB und zween Winkeln A; B, die übrigen Seiten zu finden.

Aufl. Weil C allemahl gegeben ist; er mag nun unmittelbar, oder durch die beyden übrigen gegeben seyn, (G. 13. S.) so ist

sC : sA = AB : BC; und sC : sB = AB : AC.

Exemp.

Exemp. A = 50° 7′; C = 20° 38′; AB = 12°;

also lAB = 1,0791812

lsA = 9,8349945

lsC = 10,9641757 / 9,5470189

lBC = 1,4171568

Dieser Logarithme unter der Kennzifer 3 aufgesucht; gibt BC = 26°, 13.

12. Satz. Aufgabe.

Aus zwo Seiten BC; AB, und einem Winkel A der einer gegenüberstehet, die Winkel zu finden.

Aufl. BC : AB = sA : sC.

Ex. BC = 36; AB = 49; A = 35° 7′

lsA = 9,7598515

lAB = 1,6901961

11,4500476

lBC = 1,5563025

lsC = 9,8937451

Dieser ist nur in der letzten Zifer von lsin 51° 32′ unterschieden: welches also die Grösse des Winkels in Minuten auf das genaueste ist. Man kann sich damit meistens begnügen, die Minuten zu wissen, zwischen die ein Winkel fällt. Man kann aber auch Secunden nach einem Verfahren finden, das nur beynahe zutrifft. Man nimmt an, daß von einer Minute zur folgenden, die Logarithmen in einerley Verhältniß mit den Bogen selbst wachsen.

Von

Von 51 Gr. 31 M; zu 32 M. wächst der Bogen um 60 Sec. oder 3600 Tertien und der Logarithme des Sinus um 1004; aber der log sin C wächst um 1 wenn l sin 51 Gr. 32 M. aus ihm wird; also sagt man 1004 : 1 = 3600 : $\frac{3600}{1004}$ welche vierte Zahl = 3 Tertien, gibt, um wieviel 51 Gr. 32 M. mehr sind als C; oder C = 51 Gr. 32 M – 3 Tert. = 51° 31′ 59″ 57‴.

1. Zus. Der gefundene Logarithme könnte auch dem Sinus eines stumpfen Winkels zugehören (2. Erkl. 2. Z.) und gäbe alsdenn im Exempel C = 128° 28′. Nähmlich ein Kreis aus B mit BC schneidet AC zweymahl, (G. 8. Grundſ. Zus.) und es gibt also zwey Dreyecke ABC; ABc; 6. F. bey denen die gegebenen Dinge einerley sind. Daher muß man wissen, ob der gesuchte Winkel stumpf oder spitzig ist.

2. Zus. Nachdem man B gefunden hat (G. 13. S.) findet man AC aus 11. S.

13. Satz. Aufgabe; Lehnsatz.

Aus der Summe S; und dem Unterschiede D, zwoer Grössen; x; y, die Grössen selbst zu finden.

Auflös. S = y + x; D = y — x; also S + D = 2 y und $\frac{1}{2}$ S + $\frac{1}{2}$ D = y; und x = S — y = $\frac{1}{2}$ S — $\frac{1}{2}$ D.

14. Satz.

14. Satz. Lehrs.

In jedem Dreyecke verhält sich die Summe der beyden Schenkel $AB + BC$; zu ihrem Unterschiede $AB - BC$ wie die Tangente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie AB, zur Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel; oder, wenn diese Winkel $ABC = \beta$; $ACB = \gamma$, gesetzt werden, wie tang $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$: tang $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

Beweis. Man verlängere 7. F. den Schenkel CA der dem grösten Winkel β gegenüber stehet, und nehme von A wo die Schenkel zusammenstossen, AQ und AT; $= AB$; so ist $QAB = \beta + \gamma$. (G. 13. S. 1. Z.) $= 2.ABT$; also $ABT = ATB = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ folglich $CBT = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ (13. S.) Man ziehe QB und fälle auf sie das Perpendikel CV, welches mit TB parallel seyn wird (G. 11. S.) Also ist $BCV = TBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ und $ACV = ATB = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$; aber QV; BV; sind der Winkel ACV; BCV; Tangenten für einerley Halbmesser CV; Also ist

tang $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$: tang $\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = QV : BV =$
$QC : CT$ (G. 25. S.) $= AC + AB : AC - AB$.

15. S. Aufg.

Aus zween Schenkeln AB, AC, eines Dreyeckes, und dem eingeschlossenen Winkel A; die übrigen beyden, β, γ, zu finden.

Aufl. Weil $\beta + \gamma = 2R - A$; (G. 13. S.) so kann man nach vorigem Lehrsatze sagen, $AC + AB$:

$AC-AB = t\frac{1}{2}(\beta+\gamma) : t\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Nachdem man also $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ gefunden hat, so ist β und γ; aus 13. S. gegeben.

Exempel.

AC =	2115	A =	63° 36′
AB =	1738	2R =	179 60
AC+AB =	3853	$\beta+\gamma$ =	116 24
AC−AB =	377	$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ =	58 12

$l\,t\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 10{,}2075899$
$l\,(AC-AB) = 2{,}5763414$

$12{,}7839313$
$l\,(AC+AB) = 3{,}5857993$

$l\,t\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma) \quad 9{,}1981323$

Diesem Logarithmen kömmt l t 80° 58′ am nächsten,

also	$\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ =	8 Gr.	58 M.
	$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ =	58	12
	β =	67	10
	γ =	49	14

Zus. Aus den gefundenen Winkeln findet man die dritte Seite.

16. S. Lehrs. Lehnsatz.

Wenn aus einem Puncte A zwo gerade Linien einen Kreis in E; H; und D, C, schneiden, so ist AC : AH = AE : AD (8. Fig.).

Bew.

Bew. EDC+H=2R (G. 22. S. 2. Z.) also ADE=H; folglich △ADE ∽ △AHC (G. 26. S.) woraus die Proportion fließt.

Zus. Also AC. AD = AH. AE = AFq wenn AF die Tangente ist.

17. Satz. Aufg.

In dem Dreyecke ABC 8. F. aus allen drey Seiten die Winkel zu finden.

Man beschreibe mit der kleinsten Seite BC einen Kreis, der die andern in C, D; und E; H, schneide; so ist AH=AB+BC; AE=AB−BC; also vermittelst der Proportion des 16. S. AD und auch CD=AC − AD gegeben; Nun lasse man aus B ein Perpendikel auf AC welches DC halbirt, (G. 17. S.) so AG=AD+½DC und GC=½DC gegeben; und man findet in den rechtwinklichten Dreyecken ABG; CBG; die Winkel (3. S.).

Exempel. BC=7; AB=9; AC=11; also AH=9+7=16; AE=9−7=2; 11:2=16: AD und AD=$\frac{32}{11}$; folglich DC=11 − $\frac{32}{11}$ = $\frac{121-32}{11}$=$\frac{89}{11}$, und DG=GC=$\frac{89}{22}$ und AG=$\frac{32}{11}$+$\frac{89}{22}$=$\frac{153}{22}$; also lAG=l153 − l122 ferner AB: AG=r: sin ABG; also

lr + lAG = 10, 8422687
lAB = 0, 9542425

lsin ABG = 9, 8880262

gibt ABG=50° 36′; A=39° 24′

Eben so ist lCG = l89 – l22 und CB : CG = r : sin CBG;

also lr + lCG = 10, 6069673.
lCB = 0, 8450980

lsin CBG = 9, 7618693

gibt CBG = 35° 18′; C = 54° 42′; folglich ABG + GBC = 85° 54′ = 2 R – A – C;

Anm. Daß im 3. 4. 5. 6. 8. S. alle Fragen, die von rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreyecken vorkommen können, beantwortet sind, fällt in die Augen. Diese Sätze stecken in der That als besondere Fälle in den folgenden allgemeinen, es hat mir aber für Anfänger vortheilhaft geschienen, den Gebrauch der Tafeln, und die Beschaffenheit der Rechnungen an diesen leichten Exempeln zuerst zu zeigen. Daß übrigens auch alle Fälle, die bey ungleichseitigen Dreyecken vorkommen können, hier aufgelöset sind, erhellet so: Es sind

Gegeben	Gesucht
2 W. 1. S.	beyde S. 11. Satz.
2 S. 1. W.	
gegenüberst.	beyde W. 12. Satz.
	dritte S. dessen Zus.
eingeschl.	beyde W. 15. S.
	dritte S. dessen Zus.
3. S.	die W. 16. S.

18. Satz. Aufg.

Die Verhältniß der Seite eines ordentlichen Vielecks zum Halbmesser zu bestimmen, Geom. 23. S. 77. Fig.

Aufl. Der Winkel am Mittelpuncte AKB heisse v; so ist wie im 8. S. $AB = \frac{2.AK.\sin\frac{1}{2}v}{r}$; Heißt also der Halbmesser des Kreises, in dem das Vieleck beschrieben ist, $AK = a$; die Seite $AB = b$; die Zahl der Seiten $= n$; also $v = \frac{360°}{n}$ so ist $b = \frac{2a.\sin\frac{1}{2}v}{r}$.

Ex. Für das Neuneck ist $v = 40$ Gr; $\frac{1}{2}v = 20$ Gr; und $2\sin\frac{1}{2}v = 6840404 = b$ der Seite des Neunecks für $a = r$ oder den Halbmesser der Tafeln. Woraus sich wie im 9. S. 2. Z. die Sehne 684 in einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1000$ wäre, neunmahl herumtragen liesse. Ist a sonst in Zahlen gegeben, so findet sich b allemahl, z. E. wenn $a = 7'$ so wäre $b = \frac{7.6840404}{10000000} = 4'7882828$.

1. Zus. Also $a = \frac{r.b}{2.\sin\frac{1}{2}v}$; So lassen sich S. 23. S. 6. 8. Zus. practisch und richtiger auflösen als a. a. O. Man sehe die dortige Anmerk.

2. Zus. Es sey das Perpendikel $KQ = e$; so ist $r : \sin AKQ = AK : KQ$ oder $e = \frac{a.\cos\frac{1}{2}v}{r}$; daß also in jedem ordentlichen Vielecke das Perpendikel durch die Zahl der Seiten bestimmt wird.

3. Zus. $\Delta AKB = \frac{eb}{2} = \frac{a^2.\sin\frac{1}{2}v.\cos\frac{1}{2}v}{r.r} = \frac{a^2.\sin v}{2r}$ (19. S. 5. Zus.) $= \frac{1}{2}r.\sin v$ wenn $a = r$;

das Vieleck selbst aber, dessen Fläche ich q nennen will, ist $\frac{neb}{2} = \frac{naa.\sin v}{2r}$ oder $q = n.\frac{1}{2}r.\sin v$.

Wenn $a = r$ so ist für das Neuneck $e = 9396926$ welches das Perpendikel in solchen Theilchen gibt, deren der Halbmesser des Kreises, in den das Vieleck beschrieben ist, 10000000 hat. Eben so ist $\Delta AKB = \frac{1}{2}r \sin 40\,Gr = 32139380000000$; und $n = 9$ also $q = 289254420$ Millionen solcher Quadrate, deren jedes ein Zehnmilliontheilchen des Halbmessers zur Seite hat, oder deren 100 Billionen auf des Halbmessers Quadrat gehen. Weil aber die Sinus in den Tafeln nicht vollkommen stehen, so erhellt, daß man diesen Inhalt, wenn es nöthig wäre, genauer suchen könnte. Aus den Tafeln der Trig. Brit. (2. S. 1. A.) findet sich $q = 2\,892\,544\,243\,589\,425\,500$ Billionen solcher Quadrate, deren eines ein Tausendbillionentheilchen des Halbmessers zur Seite hat, oder, deren eine Quinquillion, eine 1 mit 30 Nullen, auf das Quadrat des Halbmessers geht.

4. Zus. Wenn die grossen Buchstaben für ein ander Vieleck in eben dem Kreise ähnliche Dinge bedeuten, so ist $Q = N.\frac{1}{2}r.\sin V$ also $q : Q = n.\sin v : N.\sin V$.

Ex. Es sey $n = 4$; $N = 12$; so ist $\sin v = r$; $\sin V = \frac{1}{2}r$ also $q : Q = 4.r : 12.\frac{1}{2}r = 2 : 3$ oder das Viereck ist $\frac{2}{3}$ des Zwölfeckes in eben dem Kreise.

5. Zus. Wenn im 4. Zus. $N = 2n$; also $V = \frac{1}{2}v$ und $\sin v = \frac{2.\sin V.\cos V}{r}$ (10. S. Z.) so ist $q : Q = n.\frac{2.\sin V.\cos V}{r} : 2n.\sin V = \cos V : r$.

Ex.

Ex. $V = 60$; $v = 120$ so ist $\text{col}\, v = \frac{1}{2} r$ und $q : Q = \frac{1}{2} : 1$ oder das Dreyeck ist die Hälfte des Sechsecks. Die Vergleichungen anderer Vielecke lassen sich eben so aus den Sinustafeln nur mit etwas weitläuftigerer Rechnung anstellen.

Anwendung der Trigonometrie auf die practische Geometrie.

Es erhellet leicht, daß alle Arbeiten, bey denen es auf Dreyecke ankömmt, sich nach den bisherigen Vorschriften verrichten lassen; wenn man nur das durch Rechnung suchet, was die vorhergehende Geometrie durch Zeichnung bestimmen lehrte. Ein Exempel wird solches erläutern. Die gesuchte Weite G. 38. S. III. Fall 89. Fig. zu berechnen, verfährt man so:

I. Im Dreyecke ACD suche man aus den beyden Winkeln ACD, ADC und der Seite CD die Seite DA; (11. S.).

II. Eben so DB im Dreyecke BDC; aus BDC; BCD; DC;

III. Im Dreyecke DAB; die übrigen Winkel aus DA; DB; und ADB (15. S.).

IIII. Eben in demselben; aus den gefundenen Seiten und Winkeln die Seite AB. (15. S. Zus.).

Anwendung der Buchstabenrechnung, allgemeine trigonometrische Lehrsätze zu finden.

19. S. Aufg.

Für den Halbmesser CA = r sind 9. F. der Bogen AB; BD, AD, Sinus BE = m; DG = d; DF = s; Cosinus CE = μ; CG = δ; CF = σ; Man sucht I) den Sinus des Unterschiedes d: aus den Sinussen zweener Bogen. II) den Sinus der Summe s; aus den Sinussen zweener Bogen.

Aufl. CE : EB = CF : FI; also FI = $\frac{m\sigma}{\mu}$;

und CI = $\frac{CF.CB}{CE} = \frac{r\sigma}{\mu}$; DI = s − IF = $\frac{\mu s - m\sigma}{\mu}$; DG = $\frac{DI.CF}{CI} = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \sigma . \frac{\mu}{r\sigma} =$

$\frac{\mu s - m\sigma}{r}$ = d für I.

Für II. ist aus I; DI = $\frac{CI.DG}{CF} =$

$\frac{rd}{\mu}$; IG = $\frac{DG.FI}{CF} = \frac{DG.EB}{CE} = \frac{md}{\mu}$

also CI = $\delta - \frac{md}{\mu} = \frac{\delta\mu - md}{\mu}$ und IF =

$\frac{CI:BE}{CB} = \frac{\delta m\mu - mmd}{\mu r}$ und DF = DI + IF =

$r^2 d$

$$\frac{r^2\,d + \delta\,m\,\mu - m\,m\,d}{\mu\,r} = \frac{\mu\,\mu\,d + \delta\,m\,\mu}{\mu r} =$$

$$\frac{\mu\,d + \delta\,m}{r} = s.$$

1. Anm. Man setzt, sich Mühe im Schreiben zu ersparen, oft $r = 1$; also wird $d = \mu s - m\sigma$; $s = \mu d + \delta m$ Weil die Sinus und der Halbmesser alles Linien sind, so müssen in jedem Theile der Gleichung gleichviel Linien mit einander multiplicirt seyn, wo man die Menge derer im Dividendo von der Menge derer im Divisor abziehet. Dieses heißt man die Gleichheit der Abmessungen (dimensionum,) und wenn der Halbmesser r statt 1 wieder hergestellt werden soll, so muß er allemahl diese Abmessungen gleich machen.

1. Zus. Es ist $1 - d^2 = \delta^2$ (3. Erkl. 1. Z.) und eben so $1 = s^2 + \sigma^2$; also von

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & s^2 + \sigma^2 \text{; abgezogen} \\ d^2 & = & \mu^2 s^2 - 2m\mu s\sigma + m^2\sigma^2 \end{array}$$

läßt $d^2 = (1-\mu^2)s^2 + 2m\mu s\sigma + (1-m^2)\sigma^2$

$= m^2 s^2 + 2m\mu s\sigma + \mu^2\sigma^2$

$= (ms + \mu\sigma)^2$

oder $\delta = ms + \mu\sigma$

2. Zus. Eben so ist $\sigma^2 = 1 - s^2$ und $1 = d^2 + \delta^2$ also

$$\begin{array}{rcl} \text{von } 1 & = & d^2 + \delta^2 \text{ abgez.} \\ s^2 & = & \mu^2 d^2 + 2m\mu d\delta + m^2\delta^2 \end{array}$$

läßt $\sigma^2 = (1-\mu^2)d^2 - 2m\mu d\delta + (1-m^2)\delta^2$

$= m^2 d^2 - 2m\mu d\delta + \mu^2\delta^2$

Die Wurzel hievon kann $md - \mu\delta$ oder $\mu\delta - md$ seyn, und jede σ bedeuten. Nun setze man, die

beyden Winkel ACB; BCD, sind spitzig, und ihre Summe sey es ebenfalls, welcher Fall in der Figur angenommen wird, so daß die Rechnung für ihn eingerichtet ist. Also ist sin BD $\prec$ cos AB oder $d \prec \mu$ folglich $1-\mu^2 \prec 1-d^2$ oder $m \prec \delta$: also $md \prec \mu\delta$; Weil nun in dem angenommenen Falle σ positiv seyn soll, so muß man den Ausdruck $\sigma = \mu\delta - md$ brauchen. Der andere gäbe für σ einen verneinenden Werth, der doch bejahend seyn soll.

3. Zus. Es seyen der Winkel ACB; BCD; ACD; Tangenten; t; y; T; Secanten p; q; P; so ist $p:t = 1:m$ und $p:1 = 1:\mu$ (4. Erkl. 5 Zus.) oder $m = \frac{t}{P}$, $\mu = \frac{1}{P}$; Eben so $d = \frac{y}{q}$; $\delta = \frac{1}{q}$; $s = \frac{T}{P}$; $\sigma = \frac{1}{P}$, diese Werthe der Sinusse und Cosinusse statt ihrer in die Gleichung für s der Anmerkung gesetzt, giebt $\frac{T}{P} = \frac{1}{p}.\frac{y}{q} + \frac{1}{q}.\frac{t}{p} = \frac{y+t}{pq} = \frac{y+t}{P}.\frac{1}{q}$ Eben das in der Gleichung des 1. Zus. gethan, giebt $\frac{1}{q} = \frac{t}{p}.\frac{T}{P} + \frac{1}{p}.\frac{1}{P} = \frac{Tt+1}{Pp}$; Folglich $\frac{T}{P} = \frac{y+t}{p}.\frac{Tt+1}{Pp} = \frac{(y+t).(Tt+1)}{Pp^2}$, daher $T = \frac{(y+t).(Tt+1)}{p^2}$ und $Tp^2(y+t).(Tt+1) = Tty + Tt^2 + y + t$; Aber $p^2 = 1+t^2$ (4. Erkl.) folglich $Tp^2 = T.(1+t^2)$ also $T + Tt^2 = Tty + Tt^2 + y + t$,

daher

daher $T = Tty + y + t$ und $T - Tty = y + t$ und $T.(1 - ty) = y + t$, und $T = \frac{y+t}{1-ty}$ Für die Tangente der Summe, aus den Tangenten zweener Bogen zu finden. Man fände eben dieses durch eine etwas kürzere Rechnung, wenn man statt des 1. Zuf. den 2. brauchte, da man aber die angezeigte für diesen Fall gehörige Wurzel des Quadrates nehmen müßte.

4. Zuf. Für die Tangente des Unterschiedes ist in der vorigen Rechnung $T = Tty + y + t$ also

$T - t = Tty + y = (Tt + 1)y$ und $y = \frac{T-t}{Tt+1}$.

Wenn $T = o$ so ist $y = -t$ oder tang – Bog tang $t = -$ tang B tang t, das ist eines verneinten Bogens Tangente ist verneint.

Exempel. Es sey $AB = 45°$, $BD = 30°$, so ist $m = \frac{r_2}{2} = \mu$; $d = \frac{1}{2}$; $\delta = \frac{r_3}{2}$ (2. 3. Erkl.)

Also für den cof (45 + 30) Gr. oder cof 75 Gr. im

2. Zuf. $\sigma = \frac{r_2}{2} \cdot \frac{r_3}{2} - \frac{r_2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r_2.(r_3-1)}{4}$

Für den sin (45 + 30) Gr. oder sin 75 Gr. aus dem

1. Zuf. $s = \frac{r_2}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{r_3}{2} \cdot \frac{r_2}{2} = \frac{r_2.(1+r_3)}{4}$

$1 + r_3$

$1 + r_3 = 2{,}73205080$
$r_2 = 1{,}41421356$ mult. nach Ar. III, 13.

2,73205080
1 09282032
2732050
1092820
54641
2732
819
135
16

3,86370320 div. mit 4 giebt
0,96592580

Den Sinus von 75 Gr. für den Halbmesser = 1; und also mit 10000000 multiplicirt den Sinus von 75 Gr. vollkommen wie in den Tafeln.

Ferner ist für 45°; t = 1; und für 30 Gr; y = $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$ (4. Erkl. 3. B.) = $\frac{1}{2} : \frac{r_3}{2}$ (3. Erkl.) = $\frac{1}{r_3}$

Also tang (45 + 30) Gr. = tang 75 Gr. = T =

$$\frac{\frac{1}{r_3} + 1}{1 - \frac{1}{r_3} \cdot 1} = \frac{1 + r_3}{r_{3-1}}.$$

In diesem Ausdrucke kann man das Irrationale aus dem Nenner wegbringen, welches die Rechnung sehr erleichtert, weil es allemahl noch viel beschwer-

schwerlicher ist, mit dem durch viel Zifern ausgedruckten beynahe wahrem Werthe einer Irrationalzahl zu dividiren, als damit zu multipliciren.

Diese Wegbringung geschieht folgendergestalt: $(r3-1).(r3+1)=3-1=2$ (Ar. II. 5.) Man multiplire also Zähler und Nenner des Werthes von T mit $r3+1$; so wird $T=\frac{(r3+1)^2}{2}$

$=\frac{3+2r3+1}{2}=2+r3=3,7320508$, welches mit dem Halbmesser der Tafeln multiplicirt, die Tangente von 75 Gr. wie in den Tafeln giebt.

2. Anm. Wenn Winkel stumpf werden, so wird solches in diesen Formeln durch ihre Cosinus und Tangenten, die verneint werden, angezeigt. Wenn AB = 45 Gr; BD = 60 Gr; ist $t=1$; $y=r3$; und tang 105 Gr.

$=T=\frac{1+r3}{1-r3}=-$ tang 75 Gr.

5. Zus. Wenn $m=d$; also auch $\mu=\delta$, so wird des Bogens AD = 2 AB

Sinus $= m\mu+m\mu=2m\mu$ (Aufl. II.)

Cosinus $=\mu^2-m^2$ oder

$=1-m^2-m^2=1-2m^2$ (2. Zus.)

Dieß giebt also des doppelten Bogens Sinus und Cosinus, durch die Sinus des einfachen.

6. Zus. Eben so wenn $y=t$, so wird 3. Zus. des doppelten Bogens

$$\text{Tangente}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

So

So ist aus der Tangente von 30 Gr. die von 60 Gr.

$$= 2 \cdot \frac{1}{r_3} : (1 - \tfrac{1}{3})$$

oder $= \frac{2}{r_3} : \frac{3-1}{3} = \frac{2}{r_3} \cdot \frac{3}{2} = r_3$

Aus der von 60 Gr. die von 120 Gr.

$\frac{2 r_3}{1-3} = -r_3 =$ – tang 60 Gr. wie gehörig (4. Erkl. 1. Zus.)

7. Zus. Wenn des doppelten Bogens Cosinus σ heißt, also $\sigma = 1 - 2m^2$ (5. Z.) so ist $2m^2 = 1 - \sigma$ oder wenn man die Abmessungen nach der Anm. gleich macht, $2m^2 = r.(r-\sigma)$; und $m^2 = \frac{r.(r-\sigma)}{2}$, oder das Quadrat des Sinus des einfachen Bogens ist halb so groß, als ein Product aus dem Halbmesser, in des doppelten Bogens Quersinus $r - \sigma$ (3. Erkl. 1. Z.).

8. Zus. $m = r\frac{r.(r-\sigma)}{2}$ (7. Zus.) Nun kann m den Sinus des einfachen Bogens, σ den Cosinus des doppelten oder m des halben Sinus, σ des ganzen Cosinus bedeuten. Also giebt dieser Ausdruck folgende Regel aus dem ganzen Bogen, den halben zu finden: Man ziehe des ganzen Cosinus σ vom Halbmesser ab; den Ueberschuß (des ganzen Quersinus) multiplicire man mit dem Halbmesser, die Quadratwurzel aus des Products Hälfte ist des halben Sinus. So ist für $r = 1$; und

$\sigma =$

$\sigma = \text{cof } 30°$, $\text{fin } 15° = r\frac{1-\frac{1}{2}r3}{2} = r\frac{2-r3}{4}$
$= \frac{1}{2}r(2-r3)$.

9. Zuſ. $r^2 - m^2 = \mu^2 = r^2 - \frac{(r^2 - r\sigma)}{2} =$
$\frac{2r^2 - r^2 + r\sigma}{2} = \frac{r^2 + r\sigma}{2} = \frac{r.(r+\sigma)}{2}$ Des halben Bogens Coſinus iſt die Wurzel hieraus.

10. Zuſ. Man ſetze wieder $r = 1$ ſo iſt im 8. 9. Z. $m^2 = \frac{1-\sigma}{2}$, $\mu^2 = \frac{1+\sigma}{2}$ alſo $\frac{m^2}{\mu^2} = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$;
Es iſt aber (4. Erkl. 3. Zuſ.) $\frac{m}{\mu} = t =$ der Tangente des halben Bogens wenn T die Tangente des ganzen heißt. Ferner (4. Erkl. 5. Zuſ.) $\sigma =$
$\frac{1}{r(1+T^2)}$ Alſo $1-\sigma = \frac{r(1+T^2)-1}{r(1+T^2)}$,
$1+\sigma = \frac{r(1+T^2)+1}{r(1+T^2)}$, daher $\frac{1-\sigma}{1+\sigma} =$
$\frac{r(1+T^2)-1}{r(1+T^2)+1}$ welches alſo $= t^2$. In dieſem Werthe des Quadrats von t, multiplicire man Zähler und Nenner mit $r(1+T^2)-1$; ſo wird der Nenner
$= 1 + T^2 - 1 = T^2$ und $t^2 = \frac{(r(1+T^2)-1)^2}{T^2}$
alſo die Tangente des halben Bogens, $t = \frac{r(1+T^2)-1}{T}$.

11. Zuſ.

11. Zus. Für den Halbmesser 1, bedeute $\sin \frac{1}{2}\alpha$ den Sinus eines Bogens welcher Bogen $\frac{1}{2}\alpha$ ist, und $\sin \frac{1}{2}\alpha^2$ dieses Sinus Quadrat. Z. E. für $\alpha = 60$ Gr. wäre $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sin 30$ Gr. $= \frac{1}{2}$ und $\sin \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{4}$ Eben so bedeute Quersin α, den Quersinus des Bogens α So läßt sich der 7. Zus. für zweene verschiedene Bogen folgender Gestalt ausdrucken:

$\sin \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}$. Quersin α
$\sin \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{1}{2}$. Quersin β

folglich $\sin \frac{1}{2}\alpha^2 - \sin \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{1}{2}$ (Quersin α – Quersin β)

Es ist aber der Gleichung linker Theil
$(\sin \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\beta) . (\sin \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\beta)$ (Ar. II. 5.)

und Quersin $\alpha = 1 - \text{Cos}\,\alpha$
Quersin $\beta = 1 - \text{Cos}\,\beta$

also Quers α – Quers $\beta = 1 - \text{Cos}\,\alpha - 1 + \text{Cos}\,\beta =$ Cos β – Cos α.

Folglich giebt die Gleichung
$(\sin \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\beta) . (\sin \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\beta) = \text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha$

3. Anm. Der 7. und 10. Zus. sind zur sphärischen Trigonometrie nöthig (schiefe Dreyecke 8. Satz). Ueberhaupt sind die hier gelehrten Sätze ungemein fruchtbar, und wie man hier schon unzählige Wahrheiten aus ihnen herleiten kann, so führen sie noch viel weiter, wenn man die Algebra mit ihnen verbindet.

20. Satz. Aufg.

Die Vergleichung zwischen den Seiten eines Dreyecks und seinen Winkeln zu finden, 5. Fig.

Aufl. Es sey $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$; sin $A = p$, cos $A = \pi$, sin $B = m$, cos $B = \mu$, so ist $C = 2R - (A + B)$; daher sin $C = m\pi + \mu p$; (19. S.) aber (10. S.) $c : a = p : \sin C$ also $m\pi + \mu p = \frac{ap}{c}$; Ferner ist $m = \frac{p.AC}{BC} = \frac{pb}{c}$ und $\mu = \frac{r(c^2 - p^2b^2}{c}$ also $\frac{pb\pi}{c} + \frac{pr(c^2 - p^2b^2)}{c} = \frac{ap}{c}$ oder $b\pi + r(c^2 - p^2b^2) = a$; Folglich $c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2 - b^2p^2$ also $\pi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; und $1 + \pi = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ davon der Zähler $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c).(a + b - c)$ wird: (Ar. II. 5.) Eben so wird $1 - \pi = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab}$ und der Zähler $= c^2 - (a - b)^2 = (c - a + b).(c + a - b)$. Also wird $r[(1 + \pi).(1 - \pi)]$ oder

$$p = \frac{r[(a + b + c).(a + b - c).(a + c - b).(b + c - a)]}{2ab}$$

In dem Zähler dieses Ausdrucks, sind alle drey Seiten auf einerley Art enthalten, so daß er einerley bleiben würde, wenn auch ein paar andere Seiten als a, b, den Winkel dessen Sinus p ist einschlössen. Aber der Nenner würde alsdenn anders werden. Der Zähler heisse u; also $p = \frac{u}{2ab}$ so wäre eines

Winkels den die beyden Seiten a, c, einschlössen,

Sinus $= \frac{u}{2ac}$.

Man kann p so mit den Logarithmen berechnen, es muß aber der Logarithme davon verneinend herauskommen, weil der Halbmesser $= 1$ und also der Sinus ein eigentlicher Bruch ist.

Exempel. $a = 45$; $b = 40$; $c = 36$; so ist $u = r\,(121.49.41.31)$.

log	121	= 2,0827854
	49	= 1,6901961
	41	= 1,6127839
	31	= 1,4913617
Summe		= 6,8771271
log u		= 3,4385635
log a		= 1,6532125
b		= 1,6020600
2		= 0,3010300
log 2ab		= 3,5563025 abgezogen von
log u		= 3,4385635 läßt
log p		= −0,1177390

Hieraus nun den Winkel, vermittelst der gewöhnlichen Tafeln zu finden, überlege man folgendes: Wenn p dieses Winkels Sinus für den Halbmesser 1; und P für den Halbmesser r ist, so ist $1 : r = p : P$ also $P = rp$ und $\log P = \log p + \log r$. Es sey also r der Halbmesser der logarithmischen Tafeln, so ist $\log r = 10$; und $\log P = 10 + \log p$.

Das

Das ist man findet den Logarithmen der unter den Logarithmen der Sinusse in den Tafeln, dem gesuchten Winkel zugehört, wenn man 10 zu dem gefundenen log p addirt. Damit ich für diesen Logarithmen des Sinus in den Tafeln nicht allemahl ein neues Zeichen nöthig habe, so soll er log tab p heissen; daß also log P = log tab p nähmlich P in den Tafeln, und p für den Halbmesser 1, gehören zu eben dem Winkel.

Also ist log r = 10,

log p = − 0,1177390

log tab p = 9,8822610

der gesuchte Winkel fällt also zwischen 49 Gr. 41 und 42 M.

Damit man den verneinten log p vermeidet, und die Rechnung abkürzt, kann man gleich log r zu log u addiren;

10 + log u = 13,43885635 davon abgezog.

log 2ab = 3,55563025

log tab p = 9,8822610

Eben so kann man π, obgleich nicht ganz allein durch die Logarithmen finden.

a^2 = 2025

b^2 = 1600 10 + log 2329 = 13,3671695

3625 log 2ab = 3,55563025

c^2 1296 log tab π = 9,8108670

2329

Welches den Winkel wie vorhin giebt.

Wenn man Quadrattafeln hat, so läßt sich die Formel für π fast bequemer gebrauchen als die für p, und hat noch den Vorzug daß sie durch das Zeichen von π anzeigt ob der Winkel spitzig oder stumpf ist (3. Erkl. 3. Zus.).

Exempel. $a = 47$, $b = 19$, $c = 60$,

$$\pi = \frac{2209 + 361 - 3600}{2.47.19} = \frac{-1030}{2.893} = \frac{-515}{893}$$

$$10 + \log 515 = 12{,}7118072$$
$$\log 893 = 2{,}9508515$$
$$\log \text{tab}\,\pi = 9{,}7609557$$

Also $-\pi = \cos(54\,\text{G}.\,46\,\text{M}.)$ und der gesuchte Winkel ist $180^\circ - (54^\circ\,46') = 125^\circ\,14'$.

Anm. Die Ausdrückungen gegenwärtigen Satzes erhält man auch aus der gewöhnlichen trigonometrischen Methode. (17. S.).

Wenn man π oder p hat, sind die Winkel C, B, aus $\sin C = \frac{p\,a}{c}$, $\sin B = \frac{p\,b}{c}$ leicht zu berechnen.

Zus. Aus zwo Seiten a, b, und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden, dienet die Formel $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\pi$ wo man merken muß, daß π negativ ist, wenn der Winkel stumpf ist.

Exempel.

Exempel. a = 47′ b = 19′ A = 127° 12′

179 60

52° 48′

π = −cos(52° 48′) = −0,6045991

−2ab = −1786 a^2 = 2209

36275946 b^2 = 361

48367928 −abπ = 1079,8140

42321937 c^2 = 3649,8140

6045991 c = 60′,41

−2abπ = + 1079,8139926

a = 47

b = 19

423

47

ab = 893

Beym 20. Satz selbst fand man aus a = 47, b = 19, c = 60, den Winkel 125° 14′ Hier wird also aus den beyden ersten Seiten wie vorhin, und der dritten = 60, 41 ein Winkel folgen, der um 1° 58′ grösser ist. So viel verändert sich ein sehr stumpfer, oder, welches eben darauf hinauskömmt sehr spitziger Winkel, wenn sich die ihm gegenüberstehende Seite nur wenig verändert. Dieß ist ein Exempel von dem Gebrauche der Trigonometrie der in G. 36. S. 3. Anm. angezeigt worden.

21. Satz. Aufg.

Aus drey gegebenen Seiten eines Dreyecks seinen Innhalt zu finden Geom. 45. Fig.

Aufl. Die Seiten seyen $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, so ist

$AD^2 = a^2 - BD^2 = a^2 - (b^2 - CD^2) = a^2 - b^2 + CD^2 = a^2 - b^2 + (c - AD)^2 = a^2 - b^2 + c^2 - 2c.AD + AD^2$; also $AD = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$

Folglich wenn $a^2 + c^2 = e^2$ und also $AD = \frac{e^2 - b^2}{2c} = \frac{(e+b).(e-b)}{2c}$, $BD^2 = a^2 - AD^2 = a^2 - \frac{(e+b)^2.(e-b)^2}{4c^2}$ also $4c^2.BD^2 = 4a^2c^2 - (e+b)^2.(e-b)^2 = [2ac + (e+b).(e-b)].[2ac - (e+b).(e-b)] = (2ac + e^2 - b^2).(2ac - e^2 + b^2) = [(a+c)^2 - b^2].(-(a-c)^2 + b^2) = (a+c+b).(a+c-b).(b+a-c).(b-a+c)$ also $BD = r[(a+b+c).(a-b+c).(a+b-c).(b-a+c)] : 2c$ welches sich durch die Logarithmen berechnen läßt.

Der Inhalt also ist $BD.\frac{1}{2}c = \frac{1}{4}r[(a+b+c).(a-b+c).(a+b-c).(b-a+c)]$.

1. Zus. Wenn sin $A = p$ so giebt gleich die Figur $\frac{BD}{AB} = p$ oder $BD = ap$. Eben das giebt der 21. S. denn die dortigen b, c, sind hier c, b, und also ist hierr $p = \frac{u}{2ac} = \frac{BD}{a}$ weil nach dem 21. S. $BD = \frac{u}{2c}$, Heißt des Dreyecks Innhalt m^2 so ist $m^2 = \frac{acp}{2}$ den Innhalt aus zwo Seiten und dem einge-

schlosse-

schlossenen Winkel zu finden; oder $p = \frac{2m^2}{aC}$, den Winkel aus zwo Seiten und dem Innhalte zu finden.

Einerley Sinus gehört zween Winkeln zu. Man nehme G. 42. F. auf der verlängerten BA, AD = AB und ziehe DC, so haben die Dreyecke CAD, CAB, einerley Innhalt (G. 14. S. 2. Zus.).

Das Exempel des 20. S. kann hier gebraucht werden. Man fand dorten

log u = 3,43385635
log 2c = 1,85773325

log BD = 1,58123310

giebt unter der Kennzifer 4, aufgesucht,

die Höhe BD = 38, 126

Für den Innhalt ist

log u = 3,43385635
log 4 = 0,60206600

2,83605035

giebt auch so aufgesucht, den Innhalt = 686, 28. Das Product BD. $\frac{1}{2}$c oder 38, 126. 18 gäbe 686, 268. Aber 38, 126 ist etwas weniger als die Zahl die eigentlich dem log BD zugehörte, und giebt also den Innhalt nicht so genau als die Rechnung mit den Logarithmen. Diese Rechnung hat also den doppelten Vortheil, daß sie genauer und leichter ist.

Will man den Innhalt aus zwo Seiten und ihrem Winkel berechnen, so muß man den Logarithmen des Sinus aus den Tafeln nehmen, aber dabey bedenken daß log p = log tab p − 10.

Es sey a=45, c=40, und beyde Seiten schliessen einen Winkel von 49 Gr. 41 M. ein.

log a c = 3,2552725
log tab p = 9,8822285

= 13,1375010
10+log 2 = 10,3010300

log m² = 2,8364710

Dieser Logarithme ist ein wenig kleiner als der vorhin für den Innhalt gefundene. Weil nähmlich das Exempel des 20. S. hier gebraucht wird, nur daß die dortigen b, c, hier c, b, sind, so sollte der Winkel ein wenig über 49 Gr. 41 M. seyn, wenn der zuerst berechnete Innhalt herauskäme. Da der Winkel etwas zu klein angenommen ist, so kömmt auch der Innhalt hier zuletzt etwas zu klein, nur 686,23. Dieser kleine Unterschied zwischen dem wahren und dem angenommenen Winkel, giebt also auch einen kleinen Unterschied zwischen dem wahren und unrichtigen Innhalte. Ein grösserer Fehler bey dem Winkel, würde einen grössern Fehler bey dem Innhalte geben.

Aus dem Innhalte und den Seiten, würde man den Winkel so berechnen. Ich will den ersten Innhalt annehmen.

log m² = 2,8365035
10+log 2 = 10,3010300

= 13,1375335
log a c = 3,2552725

log tab p = 9,8822610

wie beym 20. Satze.

Die

Die sphärische Trigonometrie.

I. Erklärung.

Ein Dreyeck das drey Bogen gröster Kreise auf einer Kugelfläche BP; PA; AB; i. F. machen, heißt ein sphärisches oder ein Kugel-Dreyeck. Die Bogen heissen seine Seiten, und die sphärischen Winkel (G. 52. S. 4. Z.) seine Winkel.

1. Zus. Man ziehe von den Durchschnittspuncten der Bogen, Linien nach der Kugel Mittelpuncte K; so sind die Seiten des Dreyecks die Maasse der Winkel PKB; PKA; AKB. Von einer Seite Endpuncte 4. F. fallen auf die Ebene der andern AKB und auf beyder Ebenen Durchschnitt BK die Perpendikel PM; PN; so ist PNM = B (G. 46. S. 6. Z.) Eben so PQM = A.

Anm. Der Kürze wegen will ich durch den Bogen BA die Grösse dieses Bogens in Graden; aber durch die Ebene BA die Ebene des ganzen größten Kreises, von dem BA ein Bogen, und BKA ein Ausschnitt ist, andeuten.

2. Zus. Die drey Ebenen BP; PA; BA; schliessen am Mittelpuncte der Kugel einen körperlichen Winkel ein (G. II. Th. 3. Erkl.). Er ist die Spitze einer Art von Pyramiden, deren krumme Grundfläche die Fläche des Kugeldreyecks wäre; Was also die Geometrie von den ebenen Winkeln die einen körperlichen Winkel einschliessen erweiset, gilt von den Seiten des Kugeldreyecks.

Anm. Diese Lehren muß ich hier weglassen, weil ich vom körperlichen Winkel nicht umständlich gehandelt habe.

Dahin gehört, daß in jedem Kugeldreyecke die Summe zwoer Seiten grösser als die dritte und die aller drey weniger als der ganze Kreis ist. Aus Euklidens XI. B. 20; 21; S.

3. Zus. Wenn die Seite P A in der Ebene durch P M und K liegt, 1. F. so steht sie auf der Ebene K B senkrecht (G. 47. S.) und das Dreyeck P A B heißt rechtwinklicht; P A sein Perpendikel; B A die Grundlinie, oder das andere Perpendikel, P B die Hypothemuse,

4. Zus. Wenn N, M, K zusammen fallen, so können B und A zugleich rechte Winkel seyn, alsdenn ist P des Kreises B A Pol (G. 52. S. 2.).

5. Zus. Also kann ein Kugeldreyeck DPE G. 110. F. nach Verschiedenheit des Winkels an Pole drey rechte Winkel oder zween rechte und einen stumpfen haben. Daher was G. 13. S. von ebenen Dreyecken lehret, hier nicht gilt, wodurch denn diese Trigonometrie viel weitläuftiger wird als die ebene.

6. Zus. Wenn drey größte Kreise einander schneiden, so kann man allezeit drey ihrer Durchschnittspuncte so annehmen, daß jede Seite des sphärischen Dreyecks, das sie geben, kleiner als 180 Gr. ist. (G. 49. S. 5 Z.) Nur von solchen Dreyecken ist in der Folge die Rede.

2. Erklärung.

Die Wissenschaft aus drey gegebenen Seiten oder Winkeln eines Kugeldreyecks die übrigen zu berechnen; heißt die sphärische Trigonometrie.

Von

Von rechtwinklichten Dreyecken.

I. Satz. Lehrsatz.

In der 1. F. ist aus 1. Erkl. 3. Zus.

I; r : ſBP = ſB : ſPA

II; r : ſBA = tB : tPA

Bew. Das Loth PM (1. Erkl. 1. Z.) fällt hier in die Ebene PKA (G. 47. S. 2. Z.) also ist für den Halbmesser der Kugel, PN = ſPB; PM = ſPA; aber PN : PM = r : ſB (1. Erkl. 1. Zus.) folglich r : ſB = ſBP : ſPA; für I

ferner KM : MP = r : tAP

MP : NM = tB : r also (Ar. V. 51.)

KM : NM = tB : tPA

aber KM : NM = r : ſBA; also auch II. erwiesen.

1. Zus. In einem rechtwinklichten Dreyecke, ist der rechte Winkel allemahl gegeben. Nächst ihm nun können noch zwey Dinge gegeben und ein drittes daraus unmittelbar gesucht werden. Man nenne diese drey Dinge, die in der Frage vorkommen, Glieder der Frage, (terminos quaestionis;) so finden folgende Mannichfaltigkeiten bey ihnen statt; Sie können seyn

α) drey Seiten; β) 2. W. Hypoth. γ) 2. W. 1. Perpend. δ) 2. Perpend. 1. W. ε) Hypoth. Perp. anlieg. W. ζ) Hyp. Perp. gegenüberstehend. W.

2. Zus.

2. Zus. Aus I wird ζ; und aus II; δ aufgelöst. Es erhellet aber, daß jede dieser Proportion drey Fragen beantwortet; weil jedes Glied der Frage das gesuchte seyn kann; zu dieser Absicht braucht man nur die Proportion so zu ordnen, daß das gesuchte zulezt kömmt.

3. Zus. Aber die übrigen Fragen, folgen aus I oder II unmittelbar nicht. Man verlängere 2. F. BP, BA bis BN; BM; Quadranten werden; so sind bey M; N; rechte Winkel; und die Bogen AP, MN, schneiden einander in des Kreises BA Pole D; (G. 52. S. 5. Z.) also sind PN; DP; die Ergänzungen von BP; PA; (G. 52. S. 2. Z.) und D; DN; von BA; B; (G. 52. S. 4. Z.). Also folgt aus I im Dreyecke DPN; r : sDP = sD : sPN und r : sDP = sP : sDN aus II folgt r : sDN = tD : tPN und r : sPN = tP : tDN. In diesen beyden Proportionen, drücke man die Glieder so aus, wie sie sich auf das Dreyeck BPA, beziehen, so geben sie

III; r : cos PA = cos BA : cos BP für α

IIII; r : cos PA = sP : cos B ... γ

V; r : cos B = cot BA : cot BP ... ε

VI; r : cos BP = tP : cot B ... β

Diese VI Proportionen thun also allen Fragen genug; Man kann auch einige von ihnen aus Trig. 5. Erkl. 2. Zus. anders ausdrücken; nähmlich

aus

aus II. wird VII; r : ſB A = cot A P : cot B.
und aus V; VIII; r : cosB = tB P : tB A.
aus VI; VIIII; r : cosBP = tB : cot P.

4. Zuſ. Damit die Mühe erſparet wird, für jeden Fall jeder Frage die Proportion gehörig zu ordnen; kann man ſich nachfolgender Tafel bedienen. Man darf ſich an jedes rechtwinklichte Dreyeck, das vorkömmt, nur die Buchſtaben des bisher betrachteten ſchreiben, ſo findet man in der Tafel allezeit die Proportion, welche jede vorkommende Fragen auflöſet. B und P laſſen ſich verwechſeln, daß man bey den meiſten Fällen zwo Zeilen machen könnte. In allen Proportionen iſt der Halbmeſſer, welches die Rechnung erleichtert. Man hat ihn aber auch aus eben der Abſicht ſo viel als möglich ins erſte Glied zu bringen geſucht, und das iſt die Urſache der Einrichtungen beym 9. 12. 15. Falle. Daß aber die Tafel alle mögliche Fälle enthält, zeigt ſich folgender Geſtalt. Wenn jedes Glied der Frage zum geſuchten gemacht wird, ſo gibt α zweene Fälle 14; 1; denn welches Perpendikel geſucht wird iſt gleichgültig. Eben ſo viel gibt β, nähmlich 15; 3. Aus γ werden drey 16; 7; 11. Aus δ auch ſoviel 2; 8; 9; imgleichen 12; 4; 6; aus ε; und 13; 5; 10; aus ζ.

Gegeben	Gesucht	Proportion	Fall	aus
BA; PA	BP	r : cos B A = cos P A : cos P B	1	III.
BA; PA	B	r : ſB A = cot P A : cot B	2	VII.
BP; P	B	r : cos B P = t P : cot B	3	VI. VIII.
BP; P	PA	r : t B P = cos P : t P A	4	VIII.
BP; B	PA	r : ſB P = ſB : ſP A	5	I.
BA; B	BP	r : cos B = cot B A : cot B P	6	V.
BA; B	P	r : cos B A = ſB : cos P	7	IIII.
BA; B	PA	r : ſB A = t B : t P A	8	II.

PA; B	BA	r: cot B = tAP: ſAB weil cot AP = $\frac{r^2}{tAP}$	9	VIII.
PA; B	BP	ſB: ſPA = r: ſBP	10	I.
PA; B	P	coſPA: r = coſB: ſP	11	IIII.
BA; BP	B	r: cot BP = tBA: coſB weil tBP = $\frac{r^2}{cot BP}$	12	VIII.
PA; BP	B	ſBP: r = ſPA: ſB	13	I.
PA; BP;	BA	coſPA: r = coſBP: coſBA	14	III.
B; P	BP	r: cot P = cot B: coſBP weil tB = $\frac{r^2}{cot B}$	15	VIIII.
B; P;	PA	ſP: r = coſB: coſPA	16	IIII.

5. Zus. Wenn nicht alle Seiten des Dreyeckes kleiner als Quadranten sind, so sind der grösseren ihre Cosinus und Tangenten verneinend, die Sinus aber allemahl bejahend, (1. Erkl. 6. Zus. und Trigon. 2. Erkl. 7 Z. 3 Erkl. 2. Z. 4. Erkl. 1. Z. 5. Erkl. 3. Z.) woraus man zugleich meistens sieht, ob das, was gesucht wird, grösser oder kleiner als ein Quadrant ist. Z. E. im 1. Falle ist die Hypothenuse kleiner als ein Quadrant, wenn beyde Schenkel einer wie der andere kleiner oder grösser als Quadranten sind, aber grösser, wenn einer grösser, der andere kleiner ist. So enthalten die Regeln wegen der Zeichen mit den Regeln der Multiplication und Division Ar. I. 108. 112. verbunden, eine Menge Lehrsätze, die sonst in der Sphärik weitläuftiger erwiesen werden, ob es wohl nicht undienlich ist, die Art, wie man sie aus der Lage der Ebenen herleiten kann, sich bekannt zu machen, und einzusehen, wie diese Schlüsse mit den Folgerungen aus den Zeichen im Grunde einerley sind. Wegen der Logarithmen sehe man Trig. 2. S. 2. Anm. Es ist aber nöthig diese Sätze aus den Zeichen hier herzuleiten; denn sonst enthält jede Auflösung eine Zweydeutigkeit (ambiguitatem) weil das Zeichen beyseite gesetzt, einerley Tangente, Cosinus; u. d. g. mehreren Winkeln oder Bogen, und zwar hier nur zweyerley (1. Erkl. 6. Z.) zugehören können. Der Kürze wegen, will ich Winkel und Bogen beyde spitzig oder stumpf nennen, nachdem sie unter oder über 90. Gr. sind. Und wenn ein Bogen und ein Winkel, oder

ein

ein Paar Bogen, oder ein Paar Winkel, beyde zugleich spitzig, oder beyde zugleich stumpf sind, so sollen sie **gleichartig**, aber wenn in einem solchen Paare eines stumpf das andere spitzig ist, **ungleichartig** heissen. So fließt also aus den Proportionen des Satzes und des 3. Zus. folgendes:

6. Zus. Ein schiefer Winkel und das ihm gegenüberstehende Perpendikel sind allemahl gleichartig: Aus II. denn s B A ist allezeit bejahend: Also ist t A P bejahend oder verneinend, nachdem es t B ist; das ist; A P ist spitzig oder stumpf, nachdem es B ist.

7. Zus. Wenn beyde Winkel spitzig oder stumpf sind, sind es auch beyde Perpendikel; Ist ein Winkel spitzig, der andere stumpf, so verhält es sich mit den Perpendikeln auch so.

8. Zus. Wenn beyde Perpendikel gleichartig sind, so ist die Hypothenuse spitzig; stumpf aber, wenn sie ungleichartig sind (III.). Umgekehrt sind die Perpendikel gleichartig oder ungleichartig, nachdem die Hypothenuse spitzig oder stumpf ist.

9. Zus. Die Hypothenuse ist spitzig oder stumpf; nachdem ein Winkel mit der anliegenden Seite gleichartig oder ungleichartig ist (V.).

10. Zus. Ein Winkel ist spitzig oder stumpf, nachdem der andere mit der Hypothenuse gleichartig oder ungleichartig ist (VI.).

11. Zus. Aehnliche Betrachtungen zeigen, wie der 5. Zus. am ersten Falle gewiesen hat, ob das gesuch-

te spitzig oder stumpf ist, in allen Fällen, den 5; 9; 10; 11; 13; ausgenommen. Bey dem 5 und 13. entscheidet sich die Zweydeutigkeit aus 6. Zus. aber beym 9; 10; 11; läßt sie sich blos aus den gegebenen Grössen nicht entscheiden. Wenn nähmlich z. E. von b, der Kreise BP, BA, zweytem Durchschnitte, bp; ba; den genannten Bogen gleich genommen werden, so erhellt, daß pa = PA; und also kann bey vollkommen gleichen gegebenen Dingen das gesuchte in diesen drey Fällen auch Ba; Bp; Bpa; seyn. Diese Fälle sind hier, was in der ebenen Trigon. der 12. S. ist.

12. Zus. Wenn in einem Dreyecke 6; 7; E. BP = 90°, so nehme man auch BD = 90°, da denn DA = ± BA ∓ 90 Gr. DPA = ± BPA ∓ 90 Gr. DP = B (G. 52. S. 2 B). Also läßt sich die Auflösung eines Dreyecks, dessen eine Seite ein Quadrant ist, allemahl auf die Auflösung eines rechtwinklichten bringen. Und daher hat man die folgenden Regeln für schiefe Dreyecke nur da nöthig, wo keine Seite ein Quadrant ist; ob sie gleich auch alsdenn wahr sind, wenn dieses statt findet.

Von schiefen Dreyecken.

2. Satz. Aufg.

Die Umstände zu bestimmen, unter denen das Perpendikel innerhalb oder auserhalb eines schiefen Dreyecks fällt.

Aufl.

Aufl. 1. Auf dem ganzen Kreise der 5. F. den ich den Grund nennen will; stehe der Halbkreis A P a senkrecht. In diesem nehme man nach Gefallen P, und lege dadurch einen schiefen Halbkreis DPd; dieser macht mit dem Grunde ohnfehlbar zweene spitzige und zweene stumpfe Winkel; (G. 52. S. 4 Z.) Jene mögen ADP; AdP; diese aDP; adP, seyn; so ist PA spitzig, Pa stumpf (1. S. 6. Z.) oder eines senkrechten Kreises spitziger Bogen fällt zwischen die beyden spitzigen Winkel des schiefen, der stumpfe zwischen die stumpfen.

2. Man lege einen andern Halbkreis auch schief BPb; so sind die Winkel ABP; ADP; spitzig, abP; adP; stumpf, und wenn BA spitzig angenommen wird, ist auch BP spitzig (1. S. 8. Z.).

3. Die Figur stellt also vier Dreyecke vor: I) BPD, beyde Winkel am Grunde spitzig; II) bPd beyde stumpf; III) bPD; D stumpf; b, spitzig IIII) BPd; B stumpf, d spitzig. Das spitzige Perpendikel fällt innerhalb I, und das stumpfe innerhalb II. (1; 2.) oder wenn die Winkel am Grunde gleichartig sind, fällt das Perpendikel innerhalb des Dreyecks, und ist mit ihnen gleichartig; Sind sie aber ungleichartig; so fällt es auserhalb des Dreyecks und ist mit dem Winkel ungleichartig, der ihm am nächsten liegt; PA mit PDb; Pa mit PdB.

4. Wenn r = 1 (Trig. 19. S. Anm.) so ist (1. S. 2. Fall) cot PDA = cot PA. ſAD; der erste Factor bleibt unverändert, der zweyte wächst, wenn

AD wächst, und ist positiv; folglich wächst cot PDA unter diesen Umständen; und ist positiv; Folglich nimmt der spitzige Winkel PDA alsdenn ab; dieses dauert, bis D in Q fällt, daß AQ = 90 Gr. oder ſAQ = 1; da PQA = PA weil beyde Dinge gleichartig sind (1. S. 6. Z.) rückt D noch über Q in Δ, so nimmt ſAΔ ab, indem sein stumpfer Bogen zunimmt; also nimmt auch cot PΔA ab; d. i. dieſer Winkel wieder zu; bis Δ in b fällt und ſAΔ = ſAB da der Winkel Δ = b = B wird.

5. Weil nun d zugleich mit D fortrückt; so nimmt im Dreyecke bdP, der genannte stumpfe Winkel; des vorigen (4) Ergänzung zu 2R; zu, indem d von a bis q rückt, da er = Pa wird, und von dar wieder abnimmt.

6. Im Dreyecke bDP; nimmt der stumpfe Winkel zu, indem die Seite bD abnimmt, bis sie bQ wird, von dar nimmt er ab, und wird von Pba unendlich wenig unterschieden, wenn Δ unendlich nahe an b rückt.

7. Eben so ist cosPD = cosPA. cosDA (1. S. 1. Fall) wo der erste Factor wieder ungeändert bleibt, der zweyte aber, indem D von A wegrückt, anfangs bejahend ist, und abnimmt; daß also cos PD auch bejahend ist, und abnimmt, oder der Bogen PD spitzig ist und zunimmt. In Q wird cosAQ = o; also PD = 90 Gr; nachgehends ist cosAΔ verneinend, und wachst mit AΔ selbst; also wächst auch der stumpfe Bogen PΔ bis Δ in b fällt.

8. Im

8. Im Dreyecke II. (3) nimmt also der Bogen Pd beständig ab, indem d von a durch q nach B rückt, ist anfangs stumpf bis an q, und nachgehends spitzig.

9. Im Dreyecke III. (3) verändert sich PD wie 7. zeigt.

10. Wofern AD $<$ AB so nehme man AT $=$ AD, und es ist PD $=$ PT (1. S. 1. Fall) und PDA $=$ PTA (1. S. 2. Fall) also BTP $=$ 2R $-$ PDA.

11. Es ist aber alsdenn PT oder PD $<$ BP, wie erhellt, wenn man T von A nach B wie vorhin (7) D von A nach b rücken läßt.

12. Im Dreyecke I (3) also können BP, B, PD gegeben seyn, und kann doch ein Dreyeck PBT wie III; aus eben den gegebenen Dingen gemacht werden wenn PD $<$ BP; sonst aber nicht (10; 11) und ist in dem letzten Falle BDP allemahl spitzig (4).

13. Aus den gegebenen Dingen bP; b, Pd, im Dreyecke II; kann auch bPt werden; wenn Pd $>$ Pb (8) sonst aber nicht, und ist im letzten Falle Pdb stumpf.

14. Aus PbD, Pb, PD, läßt sich auch das Dreyeck PTb machen, wenn PD $<$ 2R $-$ Pb (10. 11.).

15. Aus PBd; PB; Pd; auch das Dreyeck PtB, wenn 2R $-$ Pd $<$ PB.

16. Bedeutet also überhaupt W einen Winkel, l die an ihm liegende Seite; L die ihm gegenüberstehende,

stehende, w den Winkel, welcher der Seite l gegenübersteht; dergleichen B, BP, PD, D, im I Dreyecke sind, und ist

W	l	L	so ist w	
spitzig	spitzig	kleiner als l	zweydeutig	12
		grösser	spitzig	
stumpf	st.	gr.	zweydeutig	13
		kl.	stumpf	
spitzig	st.	kl. als 2R−l	zweydeutig	14
		gr.	stumpf	
stumpf	sp.	gr.	zweydeutig	15
		kl.	spitzig	

17. In 4 sey A△ = 2R − AD; so ist PDA = P△A (4) und — cos DA = cos △A also PD + △P = 2R (7) Nun ist das größte A△ = 2R − AB; also das kleinste AD dessen D ein hier bestimmtes △ zugehört, = AB. Aber für AD = AB; ADP = ABP (10) also für AD > AB; ADP < ABP (4) weil AB spitzig ist, (2) und es also grössere spitzige AD giebt. Es gibt aber soviel solche grössere spitzige AD, so viel es stumpfe A△ gibt, denn jene endigen sich alle innerhalb eines Bogens, der = AQ − AB ist, und diese innerhalb des gleichen Bogen Ab − AQ. Zu jedem dieser AD, gehört ein A△ da A△P = ADP, und AD + A△ = 2R; aber zu jedem dieser AD gehört ein ADP < ABP; und jeder ADP > ABP gehört zu einem AD < AB (4). Wenn also BP, BPD, BDP gegeben sind; und der letzte Winkel

kel kleiner ist als der erste; so gibt es zwey Dreyecke, welche diese gegebene Dinge enthalten; des zweyten Seite ist $P\Delta = 2R - PD$; Ist aber der letzte Winkel grösser als der erste, so gibt es nur ein solches Dreyeck, dessen Seite PD spitzig ist (7).

18. Sind im Dreyecke II. (3); bP; b; d; gegeben; so kann die dritte Seite Pd oder $P\delta$ seyn, wofern im Dreyecke I. die dritte Seite nach 17; PD oder $P\Delta$ seyn kann; d. i. wofern $2R - Pdb < 2R - Pbd$ oder $Pbd < Pdb$; Ist aber dieses nicht, so gibt es nur ein stumpfes Pd.

19. Sind im Dreyecke III. (3) bP; b; D, gegeben, so finden zwo Seiten statt, wenn $2R - PDb < PbD$; sonst ist nur eine spitzige Seite PD.

20. Sind im Dreyecke IIII; (3) PB; B, d, gegeben, so finden zwo Seiten statt, wenn $PdB < 2R - PBd$; auser dem nur eine stumpfe Pd.

21. Dieses gibt also wie in 16 folgende Tafel: Wenn

W;	l;	w	so ist	L	
spitzig	spitzig	kleiner als W;		zweydeutig spitzig	17
		gr. . . .			
stumpf	st.	gr. als W		zweydeutig stumpf	18
		kl. . . .			
sp.	st.	gr. als 2R – W;		zweydeutig spitzig	19
		kl. . . .			
st.	sp.	kl. . . .		zweydeutig stumpf	20
		gr. . . .			

22. Weil AD = ad; AΔ = aδ; so ist dieser Bogen in den zweydeutigen Fällen (16. 21.) zweydeutig; auserdem allemahl spitzig.

Lehrsätze zu Auflösung der schiefen Dreyecke.

Wenn man 6; 7. F. auf des Dreyeckes BPD Grund das Perpendikel PA herabläßt, so bekömmt man zwey rechtwinklichte Dreyecke BPA; DPA, denen dieses Perpendikel gemein ist. Also kann man zwischen diesen Dreyecken Vergleichungen aus den Proportionen des 1. S. und seines 3. Zus. anstellen, wenn man zwo solche Proportionen, die r und PA gemein haben, verbindet. Man muß acht geben, daß die Tangenten und Cosinus von den innern Winkeln der rechtwinklichten Dreyecke zu verstehen sind; wenn man aus ihren bejahenden und verneinenden Zeichen Schlüsse machen will. Die Sinus bleiben hier beständig bejahend.

3. Satz.

r. ſPA = ſB. ſBP = ſD. ſDP (wenn man im 1. S. I nur D statt B schreibt;) also ſB : ſD = ſDP : ſBP.

4. Satz.

r. tPA = tPBA. ſBA = tPDA. ſDA (II) also tPBA : tPDA = ſDA : ſBA.

5. Satz.

5. Satz.

cof PA : r (aus III) = cof B P : cof B A = cof DP : cof D A.

6. Satz.

In IIII; r : cof P A = ſ B P A : cof P B A = ſ D P A : cof P D A.

7. Satz.

Im V oder VIII wird, wenn man B und P verwechſelt, r. t P A = cof B P A. t B P = cof D P A. t D P; alſo cof B P A : cof D P A = t D P : t B P.

8. Satz. Aufg.

Im Kugeldreyecke der 4. F. aus den Seiten den Winkel B zu finden.

Aufl. Für den Halbmeſſer K P = 1 (Trigon. 19. S. Anm.) heiſſe P N = ſin P B = m; K N = cof P B = μ; P Q = ſin P A = p; K Q = cof A P = π; und ſin A B = f; cof A B = φ; ſo iſt N Q = $r(\mu\mu + \pi\pi - 2\mu\pi\varphi)$ (Trig. 20. S. Zuſ.) und

$$\text{ſin K N Q} = \frac{\pi f}{QN} = \text{cof M N Q}$$ alſo wie vorhin

$$QM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f. NM.$$

Es ſey $\text{ſ B} = x = \frac{MP}{NP}$ alſo P M = m x und N M = m r $(1 - x^2)$ ſo iſt $QM^2 = PQ^2 - PM^2 = p^2 - m^2 x^2$ zuvor aber war es $QN^2 + m^2 - m^2 x^2 - 2\pi f$

$-2\pi fm\,r\,(1-x^2)$ also beydes gleich geſetzt, gibt $QN^2 + m^2 - p^2 = 2\pi fm\,r\,(1-x^2)$ daraus findet ſich $\frac{\pi - \mu\varphi}{fm} = r(1-x^2)$ und $x^2 = \frac{f^2 - QN^2}{f^2\,m^2}$.

Wenn $y = \sin\frac{1}{2}A \sin x$, ſo iſt $y^2 = \frac{1 - r(1-x^2)}{2}$ (Trig. 19. S. 7. Z.) dieſes gibt hier $\frac{fm + \mu\varphi - \pi}{2fm}$ $= $ (Trig. 19. S. 1. Z.) $\frac{\cos(BP-AB) - \cos AP}{2fm}$; Aber der Dividendus iſt $2.\sin\frac{AP+BP-AB}{2}.\sin\frac{AP-(BP-AB)}{2}$ (Trigon. 19. S. 8. Zuſ.) folglich die Abmeſſungen nach Trigon. 19. S. Anmerk. durch den Halbmeſſer r gleich gemacht;

$$y^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(AP+BP-AB).\sin\frac{1}{2}[AP-(BP-AB)]}{\sin BP.\sin BA}.r^2$$

Zuſ. B iſt ſtumpf, wenn $\pi - \mu\varphi$ verneinend iſt, welches auf die Zeichen und Gröſſen von π, μ, φ, ankömmt. So iſt es z. E. allemahl ſtumpf, wenn BP, BA, beyde ſpitzig ſind, aber PA ſtumpf iſt. Wenn $\pi = \mu\varphi$ wird $B = R$ welches mit III des 1. S. 3. Z. nur B, A, verwechſelt, übereinſtimmt.

9. S. Aufg.

Ein Kugeldreyeck 8. F. in ein anderes zu verwandeln, dessen Seiten jenes Winkel, und die Winkel jenes Seiten in der Ordnung wie Seiten und Winkel einander in jenen gegenüber stunden, gleich sind.

Aufl. In dem Kreise, der auf BP und BD senkrecht steht (S. 52. S. 8 Z.) seyen F, G, die Pole der genannten Kreise, so daß FG dem Winkel B gleich ist (S. 52. S. 10. Z.). Noch sey H des Kreises PD Pol, daß FH = P so ist GH = D, wo nach Verschiedenheit der Fälle D den Winkel im gegebenen Dreyecke oder seinen Nebenwinkel bedeuten kann, und also doch allemahl GH mit dem Winkel des gegebenen Dreyecks sich sehr leicht vergleichen läßt. Ferner gehen BP, DB, und BP, DP, und BD, DP, durch die Pole von FG, von FH, von GH (50. S. 3. Z.) die also in B, P, D, seyn müssen; also ist wiederum mit der vorerwähnten Zweydeutigkeit des innern Winkels und Nebenwinkels FGH = BD; FHG = PD; HFG = PB; oder HFG ist das gesuchte Dreyeck, wo sich die Zweydeutigkeiten in jedem Falle aus den Umständen heben lassen. Die verschiedenen Fälle auseinander zu setzen, ist hier zu weitläuftig, da diese Frage in der Ausübung fast gar nicht vorkömmt. Vermöge des 8. S. liesse sich für jeden Winkel ein Ausdruck durch die Seiten finden. Das gäbe drey Gleichungen; nähmlich, nächst der des 8. S; $\cos P = \frac{\Phi - \mu\pi}{m\,p}$ und

cos

$\cos A = \frac{\mu - \varphi\pi}{fp}$; da man nun die Cosinus durch die Sinus ausdrücken kann, so lassen sich, wie die Algebra lehret, die drey unbekannten Grössen, m, f, p, aus diesen drey Gleichungen, und folglich durch die Cosinus der Winkel finden. Stevin Cosmogr. III. B. 44. S. gibt eine Regel, da man aber die Sinus selbst in der Rechnung braucht.

10. Satz.

Erzählung der möglichen Fragen von schiefwinklichten Dreyecken, und Anweisung, was für Fälle nachfolgender Tafel sie beantworten.

Gegeben		Gesucht	
α) Alle drey Seiten		Ein Winkel	11. Fall.
β) Alle drey Winkel		Eine Seite	12
γ) Zwo Seiten und ein W.			
I. Der eingeschlossene	die übrige Seite		9
	ein Winkel		10
II. Der einer gegebenen Seite entgegen steht	der W. der einer geg. S. entgegenst.		1
	der W. der zwischen		4
	die gegeb. S. eingeschl.		
	die dritte Seite		3

δ) Zween

δ) Zween W. u. eine S.

I Die eingeschlossene	ein Winkel	7
	eine Seite	8
II Die einem W. entgegenstehende	eine Seite, die einem gegebenen Winkel entgegensteht	2
	anliegt	6
	der dritte W.	5

Gegeben	Gesucht	Proportionen	Fall
BP; PD; B	D	ſP D : ſB = ſBP : ſD aus 3. S.	1
BP; B; D;	PD	ſD : ſBP = ſB : ſPD 3. S.	2
BP; PD; B;	BD	r : cos B = tBP : tBA rechtw. 4. F. und 5. S. cos BP : cos BA = cos DP : cos DA	3
BP; PD; B	P	r : cos BP = tB : cot BPA rechtw. 3. F. und 7. S. tDP : tBP = cos BPA : cos DPA	4
BP; B; D;	P	r : cos BP = tB : cot BPA rechtw. 3. F. und 6. S. cos PBA : ſBPA = cos PDA : ſDPA	5
BP; B; D;	BD	r : cos B = tBP : tBA r. 4. F. und 4. S. tPDA : tPBA = ſBA : ſDA	6

BP; B; P;	D	r : cos BP = tB : cot BPA r. 3. F. und 6. S. sBPA : sDPA = cos B : cos PDA	7
BP; B; P;	DP	r : cos BP = tB : cot BPA. r. 3. F. und 7. S. cos DPA : cos BPA = tBP : tDP	8
BP; BD; B	DP	r : cos B = tBP : tBA r. 4. F. und 5. S. cos BA : cos BP = cos DA : cos DP	9
BP; BD; B;	D	r : cos B = tBP : tBA r. 4. F. und 4. S. sDA : sBA = tPBA : tPDA	10
BP; BD; PD;	B	sBP. sBD : r^2 = $s\frac{1}{2}[PD+(BP--BD)]. s\frac{1}{2}[PD--(BP--BD)]$: $(s\frac{1}{2}B)^2$ 8. S.	11
B; P; D;	die Seiten.	aus 8. S. durch die Verwandelung des 9. S.	12

1. Anm. Die Zweydeutigkeiten, die hier vorkommen können, und ihre Entscheidungen sind folgende.

1. Fall. Der gesuchte Winkel stumpf oder spitzig? Entscheidet der 2. S. 16.

2. Fall. Die gesuchte Seite stumpf oder spitzig? Entscheidet 2. S. 21.

3. Fall. Fällt das Perpendikel innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks? Entscheidet sich aus dem Winkel D (2. S. 2.) dessen Art man, ohne ihn genau zu berechnen, aus 2. S. 16. erkennt, weil die gegebenen Dinge hier wie im 1. Falle sind. Ist er zweydeutig, so bleibt die Entscheidung dieser Frage auch so.

4. Fall. Eben die Frage und eben die Antwort.

5. Fall. Lage des Perpendikels? Aus den gegebenen Winkeln zu finden (2. S. 2.) Art des Winkels D P A? Aus A D (1. S. 6. Z.) und die Art von A D aus (2. S. 22.).

6. Fall. Lage des Perpendikels wie 5. Fall. Art. v. A D aus 2. S. 22.

7. Fall. Lage des Perpendikels gibt sich aus dem Winkel B P A den die erste Proportion ohne Zweydeutigkeit bestimmt, mit dem gegebenen B P D verglichen.

8. Fall. Eben die Frage, erhält eben die Antwort.

9. Fall. Eben die Frage beantwortet B A mit D B verglichen. Daraus sieht man ob B A grösser

oder

oder kleiner als D B ist; und also ob A näher bey oder weiter von B fällt als D wenn beyde A und D auf einer Seite von B liegen. Nun ist auch P B A gegeben. Daraus ob solcher stumpf oder spitzig ist: sieht man, ob D und A auf verschiedenen oder auf einer Seite von B liegen.

10. Fall. Eben die Frage und eben die Antwort.

11. Fall. Art des gesuchten Winkels? Aus 8. S. Zus.

2. Anm. Der Bar. Neper hat eine allgemeine Regel rechtwinklichte Kugeldreyecke aufzulösen erfunden, und Canon. mirif. log. Cap. 4. beschrieben. Der Freyh. v. Wolf ist auf eine andere gekommen, die er Elem. Trig. Sphaer. §. 100. 108. zeigt, und das. §. 134. auf schiefwinklichte erstreckt. Die Scharfsinnigkeit, mit welcher diese Mathematikverständigen das Allgemeine aus so mancherley Fällen abgesondert haben, verdienet gerühmt zu werden; aber die Regeln selbst haben meiner Einsicht nach keinen grossen Nutzen in der Ausübung. Sie fassen nehmlich blos die vorhin gegebenen Proportionen in gewisse allgemeine Ausdrückungen zusammen, aus denen man für jeden Fall die gehörige Proportion herleiten kann. Heißt dieses nicht: man hat bey ihrem Gebrauche mehr zu denken, als wenn man die Proportion, die diesem Falle zugehöret, in der Tafel aufsuchet? Aber dem, der diese Tafel nicht bey der Hand hätte, könnten sie doch brauchbar seyn? Nur ist dieser Vortheil nicht groß; denn man kann diese Tafel leicht den Tafeln der Sinusse und Tangenten einverleiben; und so lange man diese nicht auswendig gelernt hat, muß man doch zu Berechnung der Dreyecke ein Buch bey der Hand haben. Nützlicher sind analytische Formeln, dergl. der Hr. v. Oppel in s. Analysi Triangulor. Hr. Euler Mem. de l'Acad. de Pr. 1753. p. 223. Maier Comm. Ac. Petrop. T. V. p. 25. u. a. geben.

Die Perspectiv.

1. Erfahrung. Wenn man etwas Undurchsichtiges in einer geraden Linie zwischen das Auge und eine Sache, die man sieht, hält, so kann man die Sache nicht mehr sehen.

2. Zus. Also empfindet man die Sache durch Lichtstrahlen, die von der Sache als gerade Linien an das Auge kommen.

3. Erf. Von entlegenen Sachen kann man, blos aus ihrem Anblicke nicht sagen, ob sie alle in gleicher Weite von uns, oder welche uns näher sind, z. E. der Mond sieht uns so entlegen aus als die Sterne; er verdeckt uns aber öfters Sterne, und ist folglich näher und zwar unendlich vielmahl, wie die Sternkunst weiset.

4. Zus. Wenn vom Puncte M ein Lichtstrahl MO 1. Fig. in das Auge O kömmt, so wird das Auge eben so gerührt werden, als wenn nur ein Strahl IO vom Puncte I in der Linie MO käme.

5. Zus. Zwischen einen Gegenstand LM und das Auge O; werde eine durchsichtige Ebene N ⏥ My; die Tafel gesetzt; welche die Lichtstrahlen MO, LO, in I; K; durchschneiden, so wird das Auge auf einerley Art gerührt werden, ob es die Strahlen von M, oder von I, K, den perspectivischen Abbildungen oder Projectionen der Puncte M, L, bekömmt.

6. Aufgabe. Auf eine Ebene, die ich den Horizont oder Boden nennen will, und dergleichen hier

die Ebene des Papiers seyn mag; stehe die Tafel (5) Q ≏ Mk senkrecht, über der Linie N ≏ der Fundamentallinie; die Lage des Auges O, und des Punctes M im Boden sind gegeben, man sucht l. (5).

Aufl. Die Lage des Auges zu bestimmen, lasse man auf den Boden ein Perpendikel herab, das also gegeben ist, und O S = a seyn mag: Ferner von S ein Perpendikel auf die Fundamentallinie; S T = d; welches auf der Tafel senkrecht stehet. (G. 47. S. 3. Z.). Eine Ebene durch T S und SO gelegt, steht also auf der Tafel senkrecht (G. 47. S.) und ihr Durchschnitt mit der Tafel ist auf den Boden senkrecht (G. 48. S.) folglich mit OS gleichlaufend (G. 46. S.) und ein Perpendikel aus O auf diesen Durchschnitt = S T (G. 12. S. 5 Z.) und auf die Tafel senkrecht (G. 47. S. 1. Z.). Man fälle von O auf die Tafel das Loth O R; welches mit ST parallel ist (G. 46. S.) also sind S T R; T R O, rechte Winkel (G. 12. S. 2. Z.) und weil T S O auch einer ist (G. 2. Th. 1. Erkl.) so ist im Vierecke S O R T; S O R auch einer (G. 13. S. 6. Z.) also R T mit O S parallel (G. 12. S.) und auf den Boden senkrecht (G. 46. S.) und O R, die Weite des Auges von der Tafel (G. 46. S. 5 Z.) = S T = d; Man ziehe ferner M N = δ auf die Fundamentallinie und folglich auch auf die Tafel senkrecht, die Ebene M S O steht auf den Boden senkrecht, und folglich auch ihr Durchschnitt mit der Tafel, I W = x, der also mit O S gleichlaufend ist. Folglich ist MS : MW = OS : IW; Es ist aber MW : MN = WS :

ST

ST folglich MW : MN = MS : MN + ST (Ar. V. 34.)
oder MW : MS = δ : d + δ folglich d + δ : δ = a : x

oder $x = \frac{a\delta}{d+\delta}$.

Ferner erhellt, daß aus der Lage des Auges und des Punctes M, die Linie TN = n gegeben ist. Da nun TW : TS = WN : MN so ist auch TW : TS = TN : TS + MN oder $TW = \frac{nd}{d+\delta}$ durch TW und WI aber ist der Punct I gegeben.

7. Zus. L sey ein Punct senkrecht über M, in der Höhe LM = α; K seine Projection; Nun befindet sich L in der Ebene durch die Parallelen LM; OS; (G. 46. S.) das ist in der Ebene MSO; folglich ist LO und K auch in dieser Ebene; (G. 2. Th. Grundſ.) also K in dieser Ebene Durchschnitte mit der Tafel; d. i. in der verlängerten WI. Folglich ist OM : OI = LM : IK. Man nenne diese IK; die perſpectiviſche Höhe = z. Nun ist OM : OI = SM : SW; aber MW : δ = SW : d also SM : SW = δ + d : d = α : z oder $z = \frac{\alpha d}{\delta+d}$.

8. Zus. $NT - WT = NW = \frac{n\delta}{d+\delta}$ also NW : IW = n : a = NT : TR; also ſind N; I; R; in einer geraden Linie.

9. Zus. NI : IR = NW : TW = δ : d.

10. Zus. $NI = \frac{NR.\delta}{d+\delta}$ und $NR = r(a^2 + n^2)$.

11. Aufg. Durch Linien, die nur auf der Tafel HQ 2. F. gezogen werden; des Punctes M (6) Projection zu finden.

Aufl. Die Puncte H, ≏, N, R, bedeuten hier und in 1. F. einerley; R heißt der Augenpunct. Man ziehe durch R eine Linie GRg mit der Fundamentallinie parallel, welche die Horizontallinie heisse; Auf ihr nehme man RG=Rg=d so heissen G, g, Distanzpuncte.

Man ziehe RN; Ferner nehme man NE=δ und ziehe GE, so ist der Durchschnitt I, die Projection, welche man eben so findet, wenn man Ne=δ nimmt und ge zieht.

Bew. Die Dreyecke RIG; NIE sind ähnlich; also NI:IR=NE:RG=δ:d; da nun die Linien NR; 2. F. 1 F. einerley sind, so müssen auch die Puncte I einerley seyn, die beyde nach einerley Verhältniß hier und (9) theilen. Die Aehnlichkeit der Dreyecke RIg; NIe gibt eben das für den andern Distanzpunct.

12. Anm. Man nimmt zweene Distanzpuncte, damit man δ von N aus auf welche Seite es am bequemsten ist, tragen kann.

13. Lehrs. Die Projection einer geraden Linie ist auch eine gerade Linie.

Bew. Durch die gerade Linie und das Auge geht eine Ebene, in der sich alle gerade Linien befinden müssen, die von jedem Puncte der gegebenen geraden Linie nach dem Auge gezogen werden;

(S.

(S. 2. Th. Grundſ.) alſo können dieſe Linien die Tafel nirgends ſchneiden, als wo die Tafel von dieſer Ebene geſchnitten wird; d. i. in einer geraden Linie (S. 2. Th. 2. Erkl. Anm.).

14. Zuſ. Wenn eine krumme Linie in einer Ebene liegt, die durch das Auge geht, ſo iſt ihre Projection auch eine gerade Linie.

15. Zuſ. Eine geradelinichte Figur, die auf dem Boden liegt, perſpectiviſch abzubilden, darf man nur der Projection ihre Winkelpuncte ſuchen, und ſolche mit geraden Linien zuſammenziehen.

16. **Exempel.** Wenn ein Quadrat, wie ABCD 3. F. auf dem Boden hinter der Tafel ſo läge, daß die Entfernungen ſeiner Winkelpuncte von der Fundamentallinie den Linien $A\alpha$; $B\beta$; $C\alpha$, $D\delta$, gleich wären, und die Fundamentallinie in den Puncten α, β, δ ſchnitten; ſo nehme man $\alpha 1 = A\alpha$; $\beta 2 = B\beta$; $\alpha 3 = C\alpha$; $\delta 4 = D\delta$; ſo geben ſich der Puncte A, B, C, D, Projectionen a, b, c, d, nach (11) und abcd iſt des Quadrates Abbildung.

17. **Anm.** Die Beſchaffenheit und Lage der Figuren gibt zuweilen hier Vortheile, daß man nicht alle Projectionen unmittelbar ſuchen darf. Hier z. E. hat das Auge einerley Lage gegen B und D; hat man alſo b gefunden, ſo gibt ſich d wenn man $Rd = Rb$ nimmt, oder durch b mit der Fundamentallinie parallel bis an $R\delta$ zieht. Dieſer Vortheil würde wegfallen, wenn eine Ebene auf den Boden lothrecht nach des Quadrates Diagonale geſetzt, nicht durch das Auge geht, oder wenn das Quadrat vom Auge ſchief angeſehen wird. Eben ſo, liegt hier die Diagonale BD mit der Fundamentallinie parallel; und iſt der Dia-

gonale AC gleich; daher $\beta\alpha = \frac{1}{2}\beta\delta = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$ und $B\beta = A\alpha + \beta\alpha$ daher in der Fundamentallinie 1. und 2. zusammen fallen. In der Fig. ist das Auge dreymahl so weit über den Boden erhoben als die Entfernung des Punctes A von der Fundamentallinie beträgt, und Höhe und Entfernung des Auges sind der Seite des Quadrates AB gleich. Daraus daß ABCD auf dem Boden, und abcd auf der Tafel dem Auge einerley aussehen, wird die Kunst begreiflich, verzogene Bilder zu zeichnen, die bey einer gewissen Stellung des Auges ordentlich aussehen; (anamorphosis optica).

18. Anm. Dieses Verfahren erfordert den Grundriß ABCD unter die Fundamentallinie zu legen. Er ist aber nur wegen der Puncte α, β, δ, und der Entfernungen der Puncte AB, C, D, von der Fundamentallinie nöthig. Weiß man diese Puncte und Entfernungen, so kann man nach 11. ohne den Grundriß verfahren.

19. Anm. Eine krumme Linie, die auf dem Boden liegt, abzubilden, kann man in ihr so viel Puncte man will annehmen, und derselben Projectionen suchen, durch die man alsdenn eine krumme Linie, die sie zusammenhenkt, mit freyer Hand ziehen muß; 4. F. Aus der krummen Linie, die man abbilden soll, die krumme Linie des Bildes selbst zu finden, lehret die Algebra.

Im Exempel ist die Lage des Auges so angenommen, daß es von einer Verticalfläche durch den Durchmesser AC; um die Grösse dieses Durchmessers entfernt; eben so hoch über den Boden erhoben und um drey Halbmesser von der Tafel entfernt ist.

20. Aufg. Ueber dem Puncte I 5. F. als eines Punctes M 1. F. Projection, in der Tafel die perspectivische Höhe (7) aufzurichten, die der wirklichen Höhe LM 1. F. zugehöret.

Auflöſ. N 5. F. und 1 F. bedeuten einerley Puncte. Man ziehe 5. F. N Q = M L 1. F. ſenkrecht auf die Fundamentallinie; Ferner RQ; und IK mit NQ parallel, ſo wird IK die geſuchte perſpectiviſche Höhe, oder K die Projection von L 1. F. ſeyn.

Beweis. Es ſoll I K = z (7) ſeyn; alſo = $\frac{\alpha d}{d+\delta}$ das iſt = $\frac{NQ.IR}{NR}$ (9).

21. Anm. Oder auch ſo: über der Fundamentallinie richte man aus einem willkührlichen Puncte n q = L M 1. F. ſenkrecht auf, und ziehe an ihre Enden aus einem willkührlichen Puncte der Horizontallinie, V n, V q; Eine Linie durch den gegebenen Punct I mit der Fundamentallinie gleichlaufend gezogen, ſchneide V n in i; und eine Parallele durch i mit q n, ſchneide V q in k; endlich eine Parallele durch k mit der Fundamentallinie; R Q in K. Denn ſolchergeſtalt wird V n: V i = R N: R I (S. 29. S.) alſo q n · i k = (V n: V i =) R N: R I; folglich iſt i k die perſpectiviſche Höhe, wenn n q = N Q der wirklichen iſt; und dieſer i k wird I K gleich gemacht und auf I geſetzt.

Wenn Puncte, über verſchiedenen Puncten des Bodens gleich hoch, aber ſo ſtehen, daß die Projectionen der Puncte, über denen ſie ſtehen, nicht alle in eine einzige gerade Linie R N fallen, ſo iſt dieſes Verfahren, die Verwirrung vieler Linien zu vermeiden, bequemer.

22. Ex. Eine Allee von Bäumen oder eine Reihe von Säulen, die man alle gleich hoch annimmt, abzubilden.

Man ſetze die eine Reihe der Bäume oder Säulen ſey in der Linie N M 1. F. die andere in einer andern ſolchen Linie und das Auge ſtehe mitten

davor; So ist TN = n die halbe Breite der Allee, oder die halbe Entfernung jedes Baums von dem ihm gerade gegenüberstehenden; die Entfernung jeden Baums von dem nächsten in seiner Reihe sey = e; der erste aber stehe gleich an der Tafel, so ist, wenn M die Stelle des (m + 1) Baums bedeutet MN = δ = me; woraus man, ohne den Grundriß wirklich unter die Fundamentallinie zu legen, die Projectionen der Stelle jeden Baums (18) und seine perspectivische Höhe (20) findet.

Es sey a = 6; d = 5. 12 = 60; n = 10; e = 12; so ist NR = r 136 = 11, 662; NI = 11, 662. $\frac{m}{m+5}$; also für

m = 0;	1;	2;	3;	4;	5;
NI = 0;	1,943;	3,333;	4,373;	5,185;	5,831

Diese Werthe von TR = a; TN = 10; imgleichen N2; N3; N4; u. s. w. als der zweyte; dritte; vierte Werth u. s. w. von NI sind von einem Maaßstabe in der 6. F. genommen worden, nach welchen also NT = 10 ist; jeder dieser zehn Theile enthielt zehn kleinere. Ferner ist Tn = TN und Rn wie RN nach G. 29. S. eingetheilet. Die Höhe α = NQ = nq ist des Platzes wegen, und weil die Deutlichkeit einen allzukleinen Maaßstab verbot, = 15 gesetzt worden.

23. Erklär. Wenn die Weite des Auges von der Tafel, in Vergleichung der übrigen Grössen, unendlich groß angenommen wird, so heißt die Projection orthographisch.

24. Zus. Hier wird EG 2. F. (11) mit RG gleichlaufend (G. 12. S. 12. Z.) also fällt I in die Fundamentallinie, und weil er zugleich in RN liegen muß, in N; oder es ist NI = o wie aus 10 erhellt, wo hier $NI = \frac{NR.\delta}{\infty}$ wird.

25. Anm. Auch wird NI = o wenn der Gegenstand gleich an der Tafel liegt, das Auge mag stehen wo es will, denn da ist $\delta = o$.

26. Zus. Für die orthographische Projection, wie für den Fall (25) ist $z = u$ (7).

27. Anm. Man bedienet sich der orthographischen Projection häufig, bey Aufrissen in der Baukunst, Landcharten; in der Astronomie; u. s. w.

28. Exempel. Ein Auge steht in der verlängerten Axe ID der Kugel Geom. 126. F. unendlich weit vom Pole D, man verlangt dieser Kugel orthographische Projection auf eine Tafel, die sie im Pole D berühret.

Jeder Punct der Kugel wie E, befindet sich zugleich in einem Kreise, der durch beyde Pole gehet wie DEIMD; einem Mittagskreise und in einem Parallelkreise wie EM; da aber alle Mittagskreise einander in der Axe schneiden (G. 49. S. 5. Z.) so befindet sich das Auge in aller Mittagskreise Ebenen; und ihre Projectionen sind also gerade Linien (14) durch die Projection des Pols, d i. durch den Pol selbst (25), deren Winkel mit einander den Winkeln der Mittagskreise gleich sind (G. 52. S. 4. Zus.) die Projection jedes Punctes in einem Parallel-

rallelkreise aber befindet sich da, wo ein Perpendikel von diesem Puncte auf die Tafel trifft (26) also ist die Projection jeden Parallelkreises, ein Kreis um den Pol, dessen Halbmesser des Parallelkreises Halbmesser gleich ist. Jeder Parallelkreis nähmlich kann als die Grundfläche eines senkrechten Cylinders angesehen werden, in dessen Axe sich das Auge unendlich entfernt befindet; Alle Seiten dieses Cylinders (G. 53. S. 8. Z.) gehen also nach dem Auge zu, und ihre Durchschnitte mit der Ebene der Tafel sind Projectionen der zugehörigen Puncte in der Grundfläche; Aber die Tafel stehet auf der Axe senkrecht, und ihre Durchschnitte mit allen Seiten liegen alle in dem Umfange eines Kreises, welcher der Grundfläche gleich ist (G. 53. S. 9. Z.). So entsteht die Projection der Kugel 7. Fig. wo e u n; g w n; n D g; die Projectionen der Parallelkreise EM; GN, und des halben Mittagskreises N D G sind.

29. Anm. Ist das Auge in der Axe, in einer endlichen Entfernung, als in O Geom. 126. F. so befindet es sich allemahl in der Spitze eines Kegels, dessen Grundfläche ein Parallelkreis ist; also ist noch die Projection jedes Parallelkreises E M ein Kreis (G. 61. S. 4. Z.) aber ihr Halbmesser verhält sich zum Halbmesser Q E; wie O D: O Q; die Projectionen der Mittagskreise bleiben wie vorhin. Diese Projection der Kugel kann nicht ihre Hälfte vorstellen, sondern nur so viel innerhalb des Winkels enthalten ist, den die Tangente aus O an der Kugel größten Kreis mit der Axe macht.

Vom

Vom Schatten.

30. Aufg. **Wenn ein Körper von einem leuchtenden Puncte beschienen wird, den Schatten zu bestimmen.**

Aufl. Man ziehe durch den leuchtenden Punct, und alle Puncte in den Gränzen des Körpers gerade Linien, soviel von diesen nirgends in den Körper selbst hineingehen, die verlängere man auf der Seite des Körpers, die vom Lichte abgewandt ist, so werden sie zwischen sich einen geometrischen körperlichen Raum einschliessen, welcher des vorgegebenen Körpers Schatten seyn wird, in den nähmlich kein Licht kömmt (2).

31. Zus. Wenn dieser Raum mit einer Ebene durchschnitten wird, so gibt sich des Körpers Schatten auf dieser Ebene.

32. Zus. Den Schatten der Linie BM s. F. zu finden, die auf dem Boden, in welchem B ist, senkrecht steht, lasse man von L ein Loth LA auf diesen Boden, und verlängere AB; LM, bis sie zusammenstossen, so ist BO der Schatten. Hieraus versteht man, wie der Schatten 9 F. gefunden wird.

33. Zus. Gibt es zweene leuchtende Puncte, wie L; l; 10. F. so kömmt in den Raum Bo gerade zu gar kein Licht, in oO aber von o nach O zu immer mehr und mehr, bis über O beyde Lichter den Boden bescheinen. Also muß Bo dunkler als oO seyn, und der Schatten von o nach O zu sich nach und nach verlieren. Man heißt dieses den Halbschatten.

34. Anm.

34. Anm. Weil die Körper, auf die Licht fällt, wieder Licht nach allen Seiten von sich senden, so kömmt auch in BO 8. F. Licht, nicht gerade zu von L, sondern von den Körpern um Bo herum, die L bescheinet. Daher ist ein Schatten nie so vollkommen, daß Dinge, die in ihm liegen, ganz unsichtbar würden, und jeder Schatten auch von einem einzigen Lichte verliert sich an seinen Gränzen nach und nach; denn Schatten ist eigentlich umgränzte Finsterniß.

35. Zus. In einem leuchtenden Körper von merklicher Grösse läßt sich eine Menge leuchtender Puncte ringsherum an seinen Gränzen annehmen, und so wird der Schatten bey ihm nach Anleitung (33) bestimmt.

36. Anm. Die Handgriffe zu schattiren, nnd andere Regeln perspectivischer Abbildungen, die sich nicht blos durch geometrische Zeichnungen bewerkstelligen lassen, gehören nicht zu meiner gegenwärtigen Absicht, und müssen aus umständlichern Abhandlungen dieser Kunst erlernet werden, die man nach gegenwärtiger Vorbereitung leichter nnd besser wird gebrauchen lernen. Ich habe hier blos das Geometrische der Perspectiv vortragen wollen, so weit es sich aus den vorhergehenden Anfangsgründen herleiten läßt. Weiter habe ich es mit Zuziehung der Algebra in einer 1752. zu Leipzig herausgegebenen Schrift Perspectiuae & proiectionum theoria generalis analytica; und nach dieser im Anhange des vollständigen Lehrbegriffs der Optik ausgeführt. Ich will noch als einen Anhang die Zeichnung eines Würfels in einer gewissen Lage beyfügen. Vor etwa zweyhundert Jahren hat man sich sehr mit perspectivischen Abbildungen besonders der regulären Körper in verschiedenen Stellungen belustiget; bey den Kupferstichen von dieser Art aber, die ich besitze, sind die Regeln sie zu zeichnen nicht angegeben. Wer die Arten die

ordent-

ordentlichen Körper in die Kugel zu beschreiben aus dem Pappus gelernt, und andere dergleichen Betrachtungen angestellt hat, wird sich bey dergleichen Arbeiten leichte selbst helfen können, wenn er Lust hat, und für nützlich befindet, sie vorzunehmen. Man findet Regeln von solchen Zeichnungen, aber ohne Beweise, in der Perspective Pratique par un religieux de la comp. de Iesus (Paris 1663.; 2. Quartbände) seconde Partie Traité V.: Rembold hat das meiste von dem ersten Theile dieses Buches unter dem Titel: vollständige Anweisung zur Perspectiv-Reißkunst zu Augspurg 1710. in 4to deutsch herausgegeben.

37. Aufg. **Wenn eines Würfels 11. Fig. Diagonale HA auf dem Boden senkrecht steht, zu finden, wo die Lothe von seinen übrigeu Ecken auf den Boden fallen; davon B; G; F; mit A in einer Seitenfläche C; D; E; mit H in der gegenüberstehenden sind. So daß des Würfels Flächen ABCD; DAFE; EDCH; und EFGH; HGBC; BGFA sind; die drey letzten stehen den drey ersten gegenüber.**

Auflös. I. Die Seite des Würfels heisse der Kürze wegen = 1; so ist die Diagonale einer Seitenfläche wie $AE = r(AFq + FEq) = r2$ und die Diagonale des Würfels $AH = r(AEq + EHq) = r3$.

II. Die Seiten des Würfels HE; HC; HG; stehen auf der Seitenflächen Diagonalen AE; AC; AG; senkrecht, also ist Tang $AHE = \frac{AE}{EH} = r2 = \frac{AC}{HC}$ = Tang AHC = $\frac{AG}{AH}$ = Tang AHG; Ferner ist

wegen

wegen der parallelen Seiten des Würfels AHE = HAB; AHC = HAF; AHG = HAD; Also macht die Diagonale, mit den drey Seiten, die in H; und mit den dreyen, die in A zusammenstossen, sechs Winkel von einerley Grösse. Jedes Secante ist r_3 (Trig. 4. Erkl. 5. Zus.) und daher der Sinus $= \frac{\text{Tang}}{\text{Sec}} = \frac{r_2}{r_3}$

Man lasse 14. Fig. GI auf HA senkrecht, so ist $HI = \frac{GH.HG}{AH} = \frac{1}{r_3}$ und $GI = \frac{AG.GH}{AH} = \frac{r_2}{r_3}$ Nähme man C, oder E statt G, so käme HI, eben wie vorhin und CI = GI = EI; also steht HA auf der Ebene durch EGC senkrecht und geht durch I, den Mittelpunct dieses Kreises, der um das gleichseitige Dreyeck EGC dessen jede Seite $= r_2$ ist, beschrieben wird.

III. Vollkommen auf eben die Art zeiget sich, daß HA auch auf der Ebene durch BFD senkrecht stehet, und durch den Mittelpunct des Kreises um das gleichseitige Dreyeck BFD geht; dessen Seiten mit den Seiten des obigen einerley sind. Es sey nähmlich DK auf HA senkrecht, so ist $AK = \frac{1}{r_3}$ und $KD = \frac{r_2}{r_3} = GI$.

IIII. Die Ebenen dieser beyden Kreise sind also mit dem Boden parallel, (G. 46. S. 9. Z.) und H, A, ihre Pole, (G. 49. S. 9. Z.) und die Lothe von des Würfels Ecken auf den Boden, sind mit der Diagonale gleichlaufend (G. 46. S.).

V. Es sey Ee 12. F. ein solches Loth. Weil sich IE in der Ebene durch die beyden Parallelen IA; Ee

(G.

(G. 2. Th. Grundſ.) und auch in der Ebene durch EGC (III) befindet, ſo iſt ſie beyder Ebenen Durchſchnitt; wie Ae vollkommen nach dieſer Art zu ſchlieſſen, der Durchſchnitt des Bodens mit der Ebene durch die Parallelen, folglich ſind IE; Ae parallel (G. 2. Th. 2. Erkl. Zuſ.) und gleich (G. 12. S. 3. Z.) alſo Ae = $\frac{r^2}{r_3}$ (III).

VI. Weil die Schlüſſe (VI) von jeder Ecke des Würfels gelten; ſo ſeyen 13. Fig.; e; c; g; die drey Puncte, in denen die Lothe von E; C; G; den Boden treffen; Sie werden alſo in dem Umfange eines Kreiſes liegen, der mit Ae = IE beſchrieben iſt (III) und aus (G. 2. Th. 2. Erkl. Zuſ.) iſt jede Seite des Dreyecks auf dem Boden wie ec der darüberſtehenden Seite des obern Dreyecks, wie EC, parallel; und gleich (G. 12. S. 3. Z.) folglich das Dreyeck auf dem Boden dem obern gleich und ähnlich (G. 46. S. 2. Z.) alſo gleichſeitig (III).

VII. Wenn f; d; b; 13. Fig. Puncte ſind, in denen die Lothe von F; D; B; auf den Boden treffen, ſo liegen ſolche in eben dem vorigen um A mit Ae beſchriebenen Kreiſe, und geben darinnen wiederum ein gleichſeitiges Dreyeck (II. VI.).

VIII. Wo Anfangs ein Punct wie e liegen ſoll, das kömmt auf die Stellung des Würfels an, den man um HA als um eine Axe nach Gefallen drehen kann; Iſt die Lage des Punctes e angenommen, ſo geben ſich c, g, leicht dadurch, aber f, d, b, ſind

auch bestimmt, und nun muß noch gelehrt werden, wie man sie findet.

VIIII. Eine Ebene durch HA und AD ist auf den Boden senkrecht (G. 47. S.) und in ihr befindet sich der Neigungswinkel der Linie DA gegen den Boden (G. das. und 2. Th. 1. Erkl.) der also mit DAH = 90 Gr. ist. Man s. die 14. F. wo AQ des Bodens Durchschnitt mit der senkrechten Ebene durch AH und AD ist, HG befindet sich, weil sie mit AD parallel geht, in einer Ebene durch D, A, H; d. i. in der nur genannten senkrechten Ebene.

X. Also ist der Neigungswinkel DAQ = AHD dessen Sinus $= \frac{AD}{AH} = \frac{1}{r_3}$ und der Cosinus = sin HAD $= \frac{r_2}{r_3}$; Es ist aber $\frac{\text{sin } 30 \text{ Gr.}}{\text{cosin } 30 \text{ Gr.}}$ = Tang 30 Gr. (Trig. 4. Erkl. 3. Zus.) $= \frac{1}{r_3}$ (Trig. 2. Erkl. 1. Zus.) also sin DAQ = Tang 30 Gr. die Zahl, durch welche Tang 30 Gr. in den Tafeln ausgedruckt wird; fällt zwischen die Sinusse von 35 Gr. 15 M. und 35 Gr. 16. M; zwischen diese beyden Winkel fällt also der Winkel DAQ; oder nach Gellibrands Tafeln, zwischen 35 Gr. 15 M. 36 Sec; und 36 Gr.

XI. Alle Seiten des Würfels AD, EF, GH, BC, sind parallel, und haben also (G. 53. S.) die nur gefundene Neigung (G. 47. S. 4. Z.).

XII.

XII. EF sey eine solche Seite 15. Fig. und begegne dem Boden in P die Perpendikel auf dem Boden Ee, Ff, sind in einer Ebene (G. 46. S.) in der sich auch EFP befindet, (G. 2. Th. Grundſ.) folglich ist P im Durchschnitte dieser Ebene mit dem Boden ef; d. i. efP ist eine gerade Linie (G. 2. Th. 2. Erkl. Anm.).

XIII. Also cos P : sin P $= \frac{r_2}{r_3} : \frac{1}{r_3}$ (XI) $=$ $r_2 : 1 = Pf : fF = Pe : eE = F\varphi : \varphi E$ wenn $F\varphi$ mit Pe parallel geht. Folglich $\varphi E . r_2 = F\varphi$ also $FE = 1 = \varphi E\, r_3$ oder $\varphi E = \frac{1}{r_3}$ und daher $F\varphi = fe = \frac{r_2}{r_3} = Ae$ (V) also $eAf = 60$ Gr. (G. 23. S. 5. Zuſ.).

XIIII. Trägt man also in den Kreis 13. F. die nur gefundene Sehne ef vom angenommenen Puncte e (VIII) oder nimmt man den Bogen $ef = 60$ Gr; so gibt sich f; und alles übrige (VIII).

XV. Aus (III) ist $AH - HI = r_3 - \frac{1}{r_3} = \frac{3-1}{r_3} = \frac{2}{r_3} = Ee$ (V).

XVI. $Ee - E\varphi = \frac{1}{r_3}$ (XIII) $= Ff = \frac{1}{2} Ec$.

XVII. Zeichnung des verlangten.

Mit dem Halbmesser Ae = IE (V) beschreibe man einen Kreis; und nehme in solchem einen Punct e nach Gefallen an; von diesem Puncte an beschreibe man in den Kreis ein gleichseitiges Dreyeck ecg (G. 23. S. Anm.) auch nehme man eine Sehne ef = eA; (XIII) und beschreibe von f an ein anderes gleichseitiges Dreyeck in eben den Kreis fdb; so sind die Winkelpuncte der beyden Dreyecke die gesuchten (VI. VIII).

XVIII. Die drey Ecken des Würfels E; G; C, stehen über e; g; c; in der (XV) angewiesenen Höhe, und die drey Ecken B; F; D, über b; f; d; in der (XVI) angewiesenen.

XVIIII. Zum Grundrisse braucht man keine Linie weiter zu finden als Ae; und zu den Höhen nur noch Ee. Blos geometrisch findet man sie folgendergestalt: Man nenne die Seite des Würfels HE = a; die Diagonale seiner Grundfläche HD = b = ar_2; die Diagonale des Würfels c = ar_3; welche Ausdrückungen aus (I) werden, wenn man nun a nennt, was dort 1 hieß. Die letzten beyden Linien lassen sich aus der ersten durch Zeichnung finden (G. 15. S. 2. Zus. und 60. S. 12. Z.). Weil nun $r_2 = \frac{b}{a}$ und $r_3 = \frac{c}{a}$ so ist $\frac{r_2}{r_3}$. a oder $\frac{b}{c}$. a (II. 7.) = IE (V). Man findet also Ae; wenn man zu c; b; a; die vierte Proportionallinie su-

cher

chet (S. 30. S.). Ferner ist $\frac{1}{r_3} = \frac{a}{c}$; und aus XVII; $Ff = \frac{1}{r_3}$. $a = \frac{a^2}{c}$; Also die dritte Proportionallinie (S. 20. S. 1. Z.) zu c; a; und verdoppelt = Ee.

XX. Durch Rechnung lassen sich die nöthigen Linien folgender massen finden. Man setze $a = 10000$;

$l2 = 0,3010300$

$l3 = 0,4771212$ So ist

$l\frac{2}{3} = -0,1760912$

$\frac{1}{2} l\frac{2}{3} = -0,0880456 = l r^{\frac{2}{3}} = l\frac{r_2}{r_3}$

$la = +4,$

$l\frac{a r_2}{r_3} = 3,9119546 = lAe$

also $Ae = 8165 -$

Ferner $la = 4,$

$lr_3 = 0,2385606$

$la.\frac{1}{r_3} = 3,7614394 = lFf$

also $Ff = 5773 +$ und $Ee = 10546 +$

Diese Rechnung wird in den meisten Fällen die erforderte Schärfe vollkommen geben, weil die Seite des Würfels selten so groß seyn wird, daß

kleinere Theile beträchtlich wären. Sonst könnte man sie mit grössern Logarithmen auch bis auf Hunderttausendtheile, und mit den Zahlen selbst, so weit man wollte, treiben. Ist die Seite des Würfels willkührlich, so kann man für sie die Länge eines Maaßstabes, der tausend oder hundert gleiche Theile hat, annehmen, und so diese Rechnung bequem brauchen.

XXI. Das bisher gefundene, kann für unzählige perspectivische Abbildungen immer eben des Würfels einerley bleiben, wenn man nur die Stellung des Auges ändert (11. 20.). Die Arbeiten alle, durch welche eine solche Abbildung, wie in der 11. F. entstanden ist, darzustellen, verstattete die Grösse der Tafel nicht, und wenn ich die Figur verkleinert hätte, wäre sie unkenntlich geworden. Es ist auch hier nichts zu beobachten, das jemand, der den vorhin gegebenen Regeln folgen will, nicht selbst finden könnte. Die 11. Fig. ist von einer gleich grossen Zeichnung abgetragen worden, für die ich die Erfernung des Auges von der Tafel der Diagonallinie des Würfels gleich, und die Höhe des Auges über den Boden = $\frac{7}{4}$ dieser Diagonale angenommen habe. Die Seite des Würfels ist = AZ 12. Fig. woraus man die wahre Diagonale suchen muß (XVIIII) deren perspectivische Abbildung HA der 11. Fig. ist; das Auge ist so gestellt, wie die 11. und 13. F. zusammen zeigen, wenn man den Augenpunct in die verlängerte Linie Aα AH in der gehörigen Höhe = $\frac{7}{4}$ c

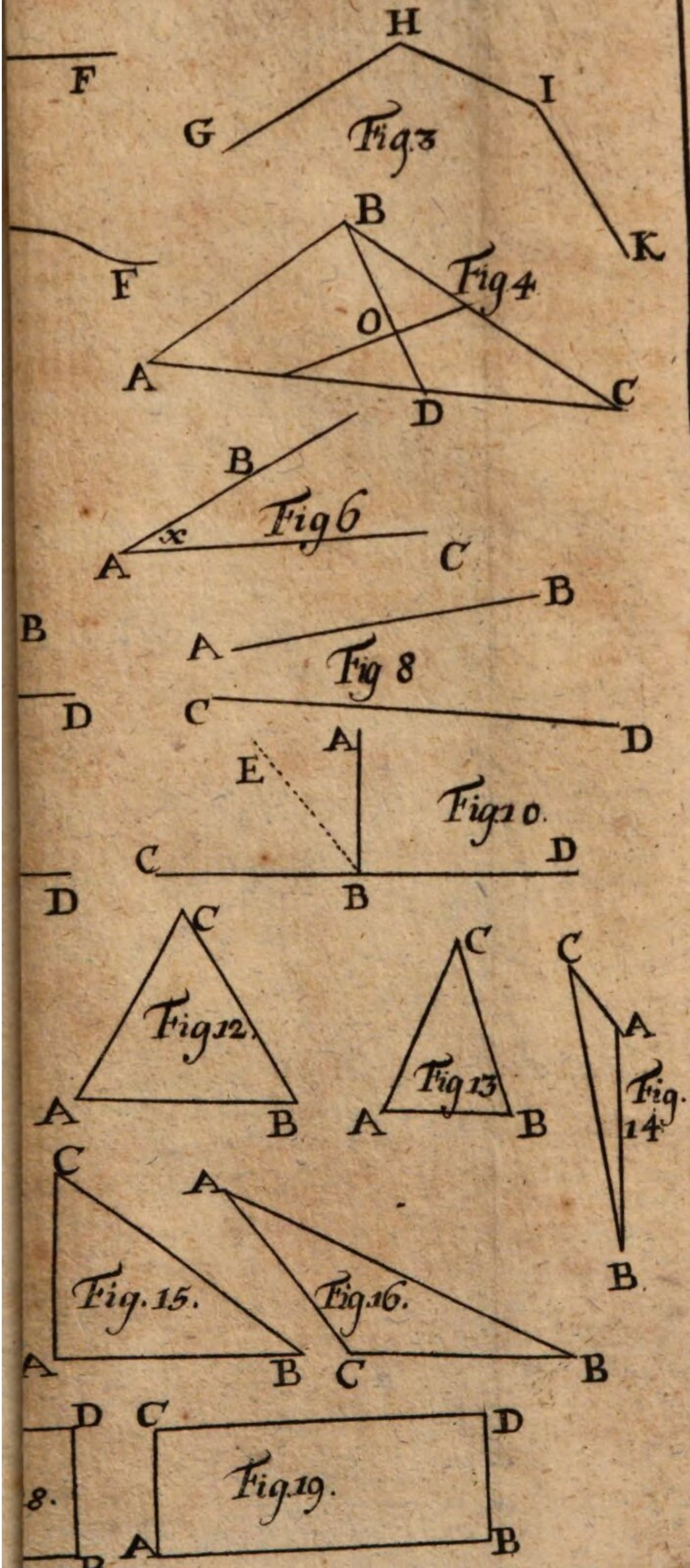
über

über die Fundamentallinie δ ε α φ γ setzt. Es befindet sich nähmlich das Auge in einer lothrechten Fläche durch den Durchmesser des Grundrisses, der mit e c und f b gleichlaufend ist, und der Würfel ist so gedrehet (VIII) daß diese drey Parallelen auf die Fundamentallinie senkrecht stehen. Der Halbmesser des Grundrisses 13. F. aber ist des Platzes wegen zu klein angenommen worden. A e 12. F. stellt seine eigentliche Grösse für diese Zeichnung nach V; und eben daselbst A I die Höhe E e (XV) vor. Nachdem man der Puncte des Grundrisses Projectionen nach 11. gefunden hat; ist es am bequemsten, der Ecken des Würfels perspectivische Höhen nach 12. zu bestimmen.

Nachricht für den Buchbinder.

Da die 12. Kupfertafeln am füglichsten am Ende des Buchs zu binden sind, so wird der Buchbinder bey jeglicher derselben so viel Papier ansetzen, daß sie bey dem Lesen ganz herausgeschlagen werden könne.

TAB. I.


H
F
I
G
Fig. 3
B
K
F
Fig 4
O
A
C
D
B
Fig 6
x
A
C
B
B
A
Fig 8
D
C
D
A
E
Fig. 10.
C
D
D
B
C
C
C
A
Fig. 12.
Fig 13
Fig. 14
A
B
A
B
B
C
A
Fig. 15.
Fig. 16.
A
B
C
B
D
C
D
Fig. 19.
8.
A
B
B
C
D
Fig. 21.
B

TAB II.

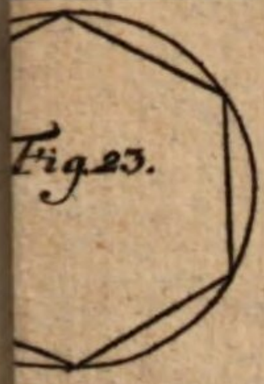


Fig. 23.

Fig. 24.

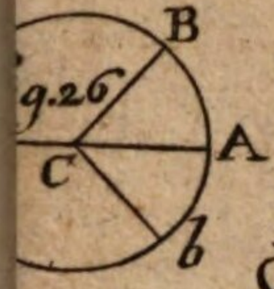


Fig. 26

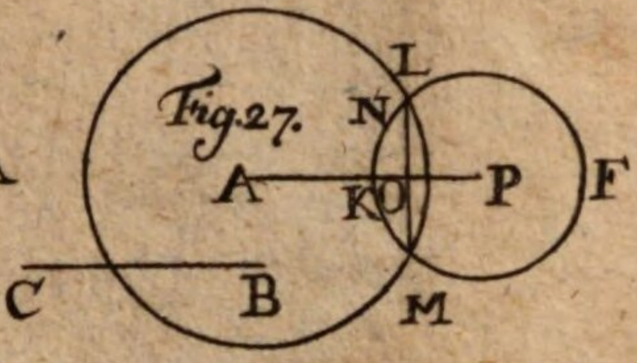


Fig. 27.

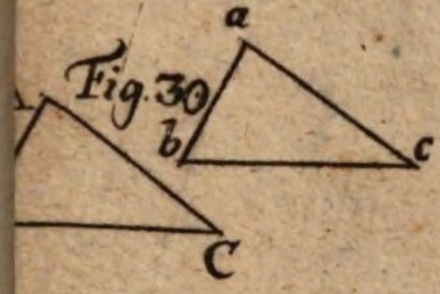


Fig. 30

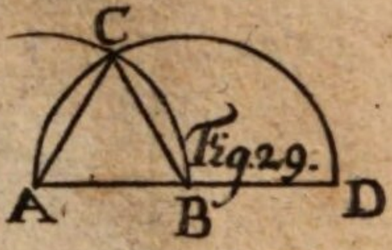


Fig. 29.

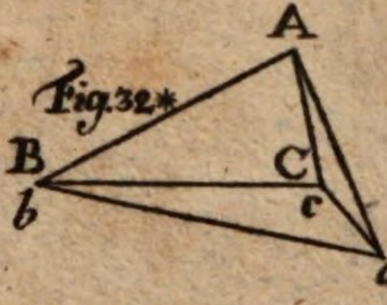


Fig. 32.

Fig. 35.

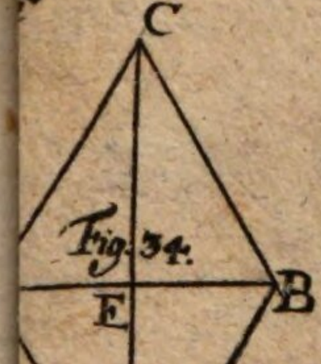


Fig. 34.

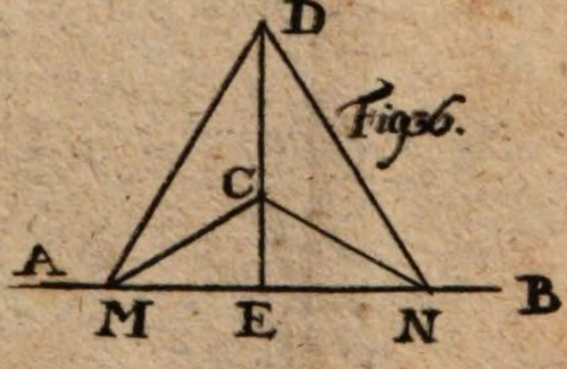


Fig. 36.

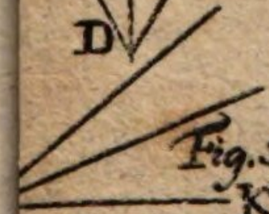


Fig. 38.

Fig. 39

Fig. 41.

Fig. 42.

TAB III

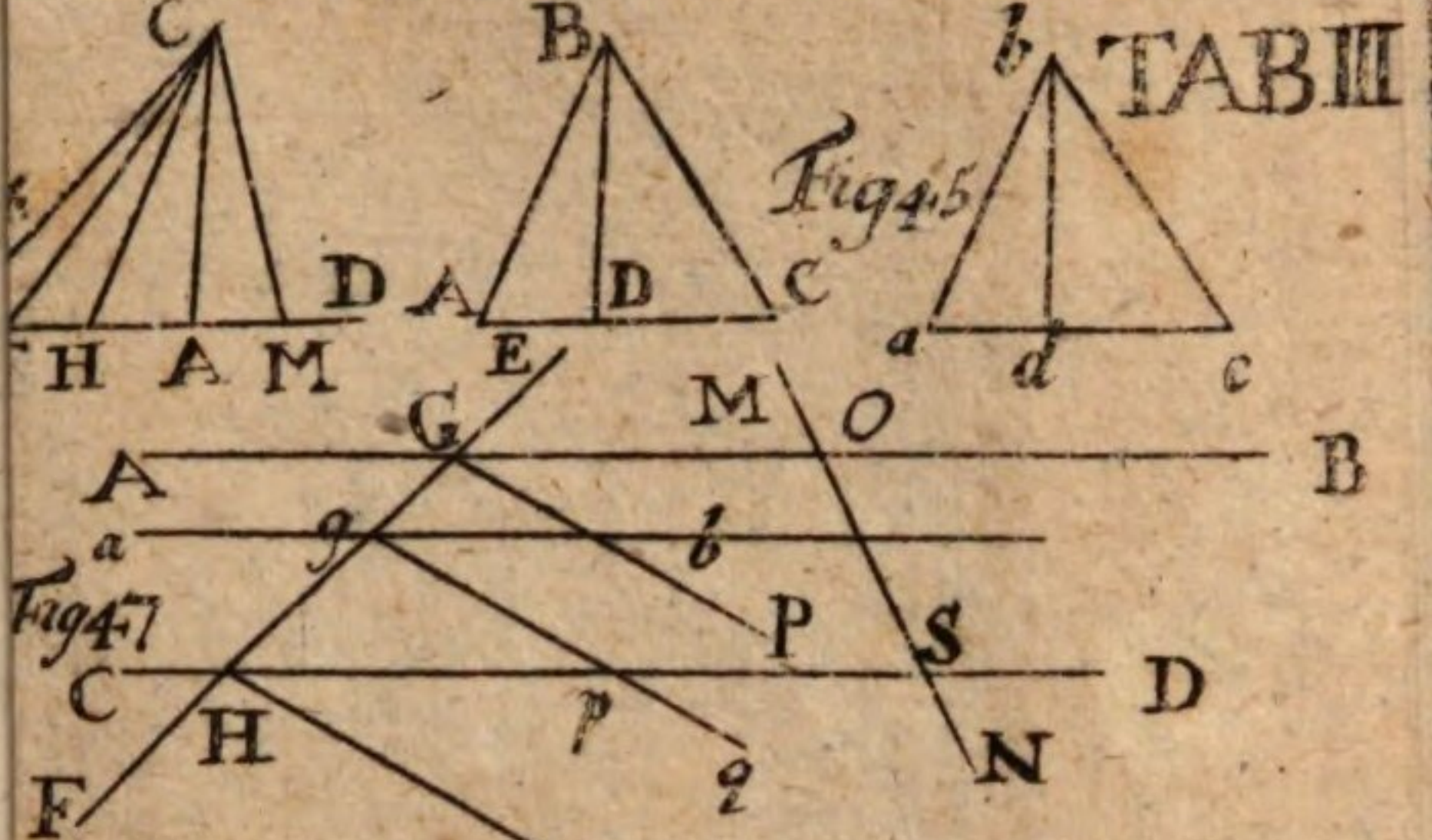


Fig 45

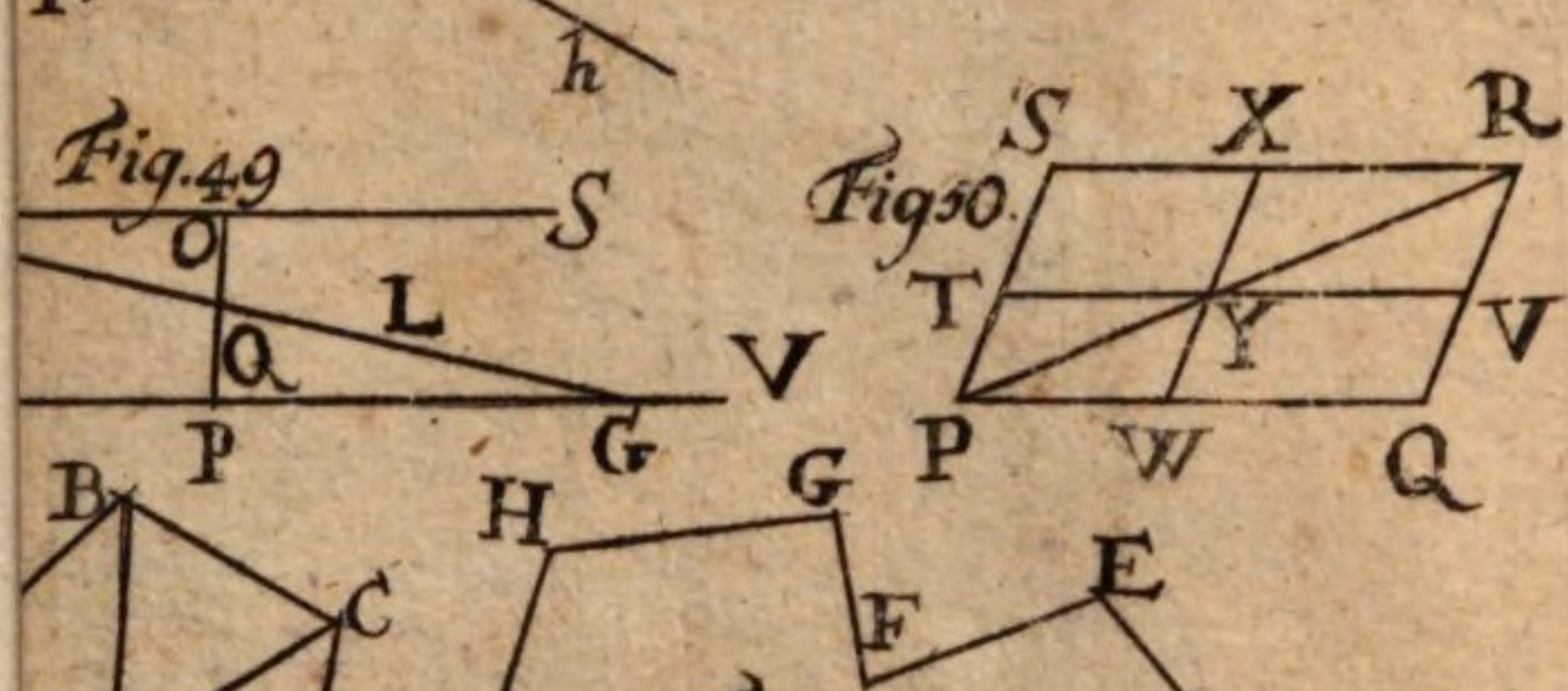


Fig 47

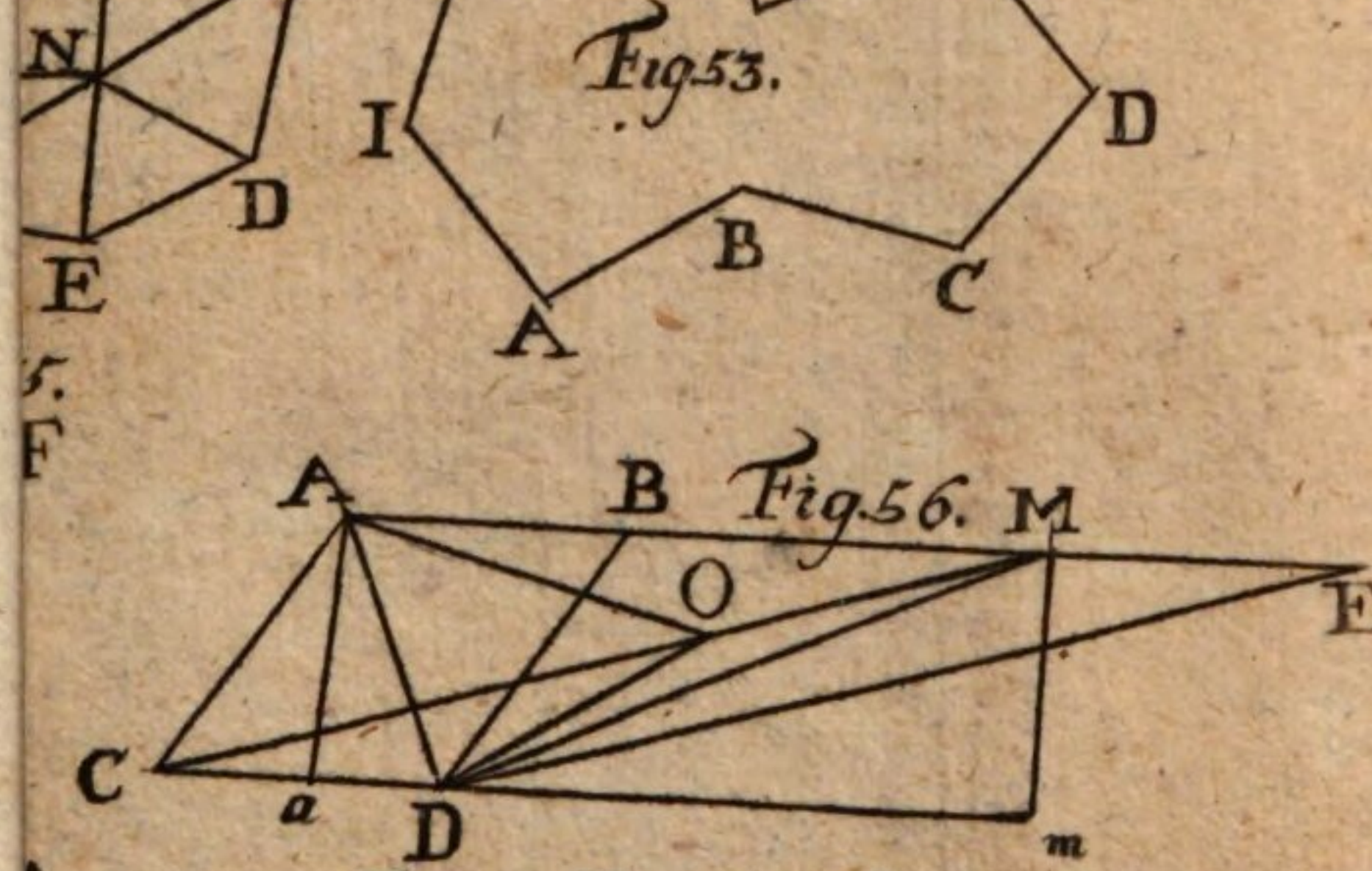


Fig. 49

Fig. 53.

Fig 50.

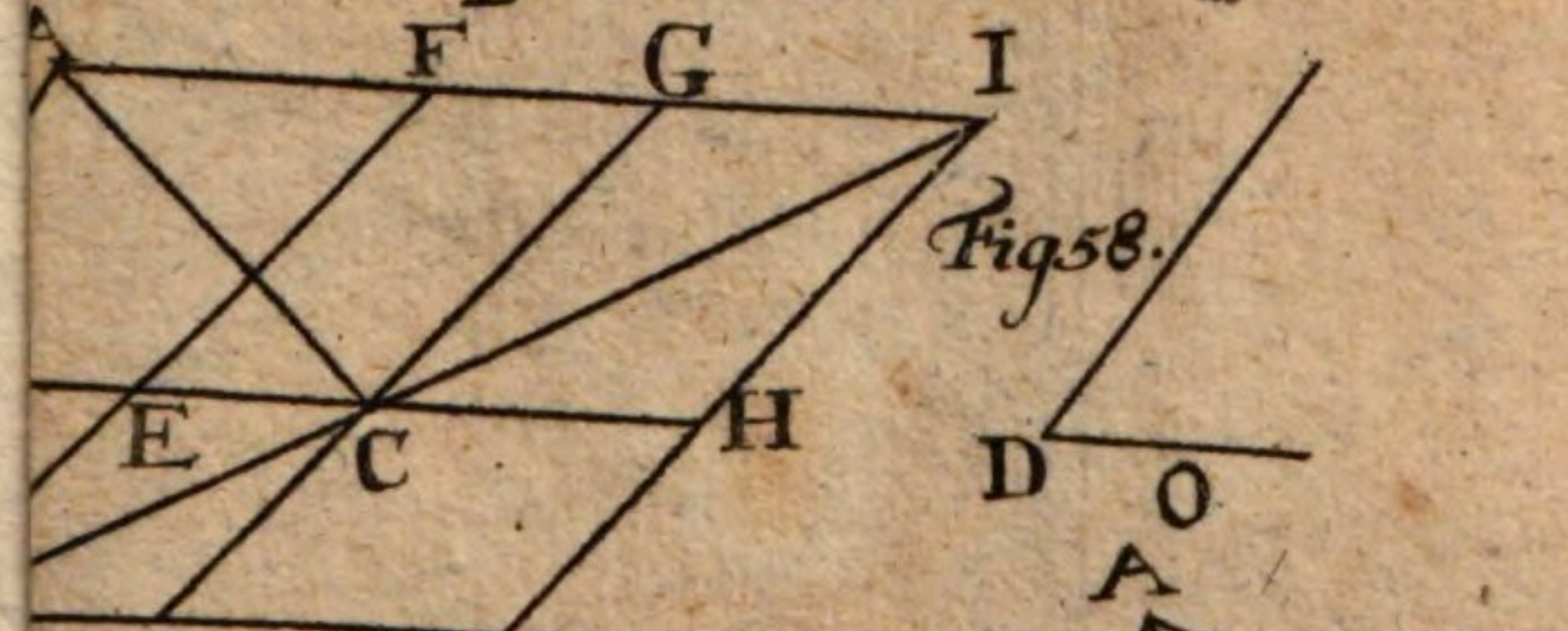


Fig. 56.

Fig. 58.

Fig. 59.

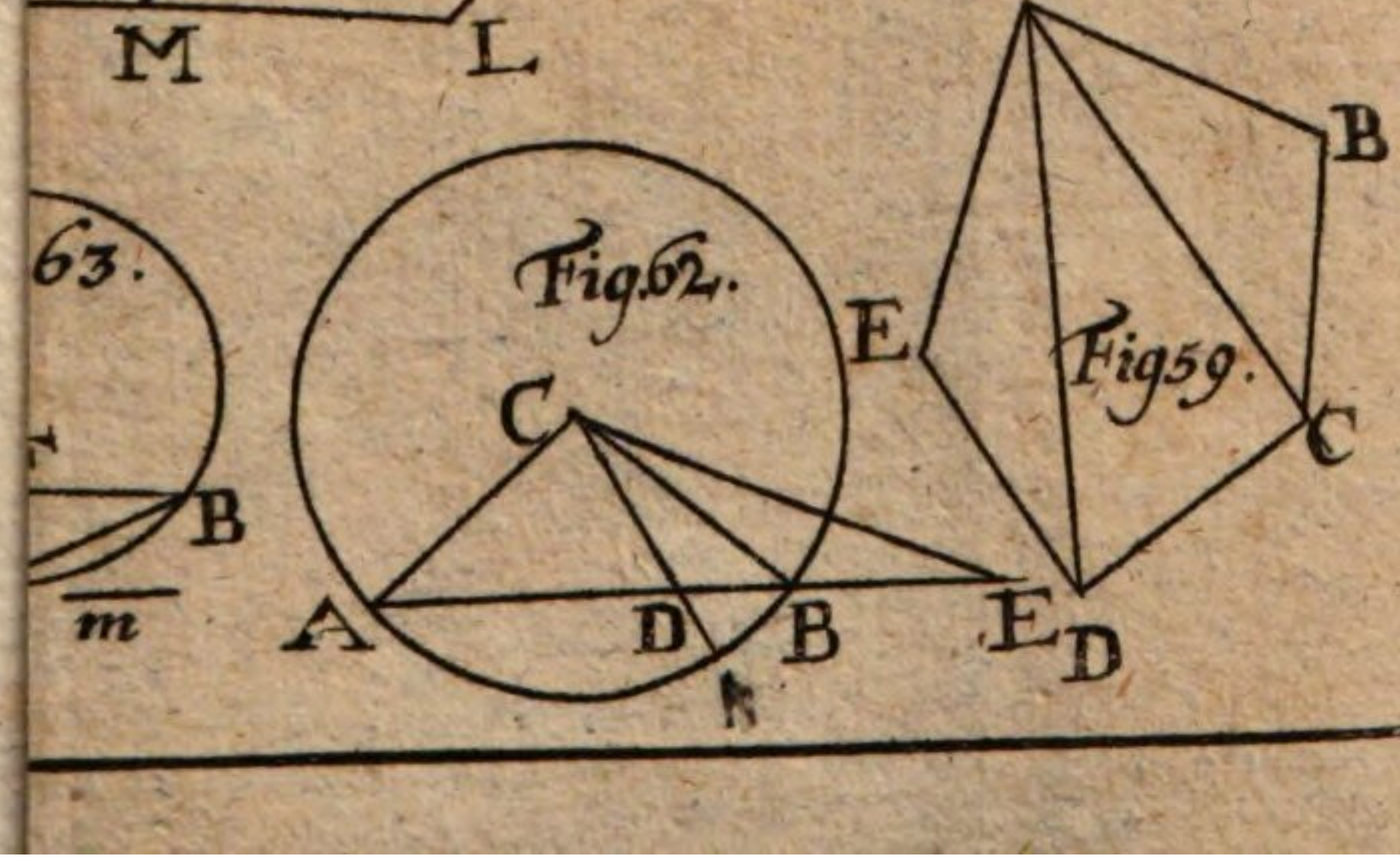
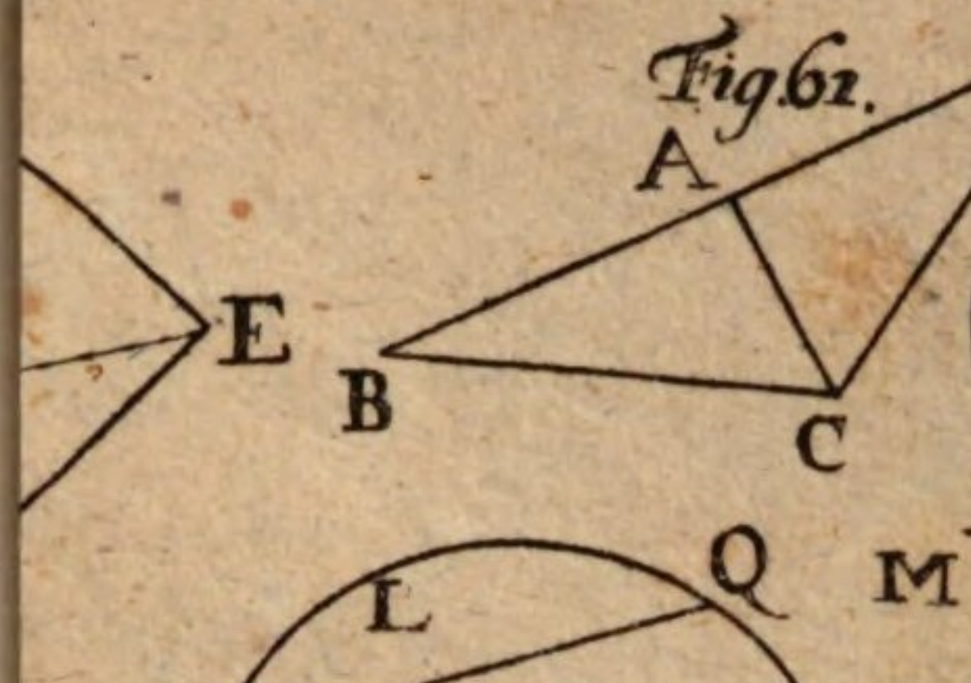


Fig. 62.

TAB. IIII.

Fig. 61.



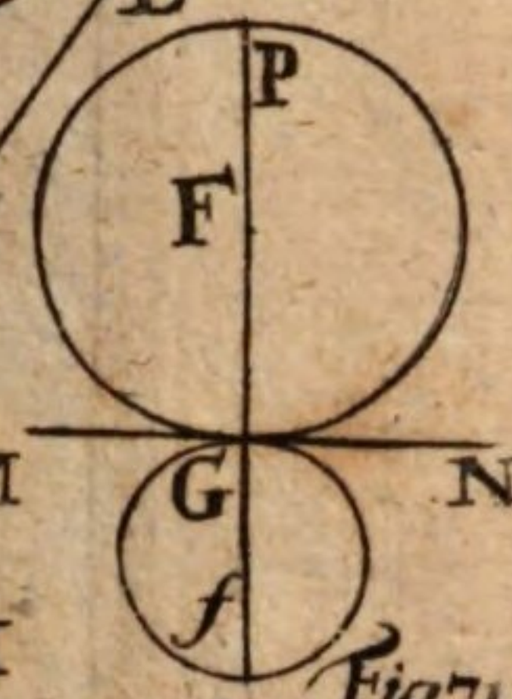


Fig. 71.

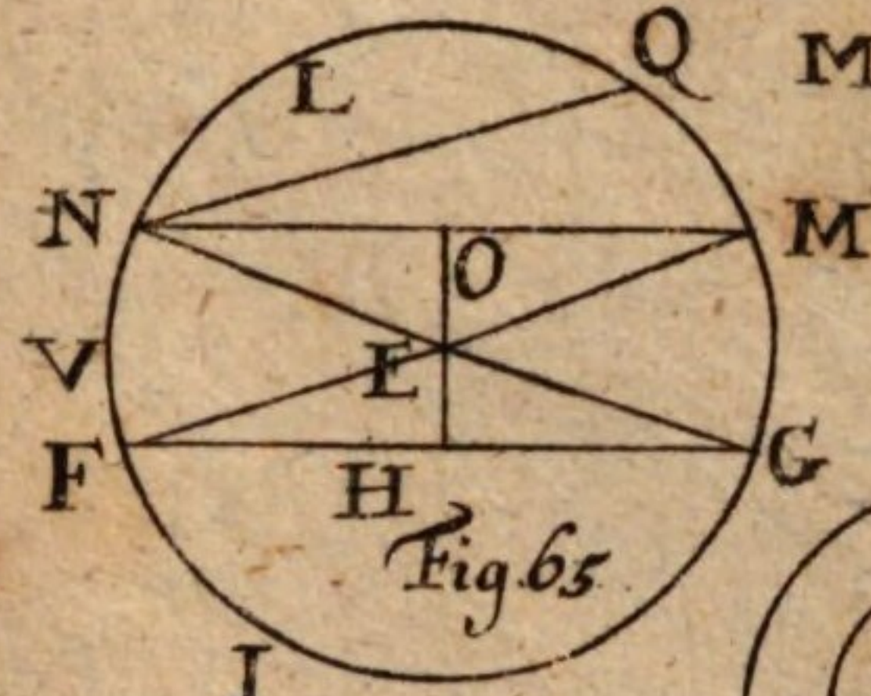
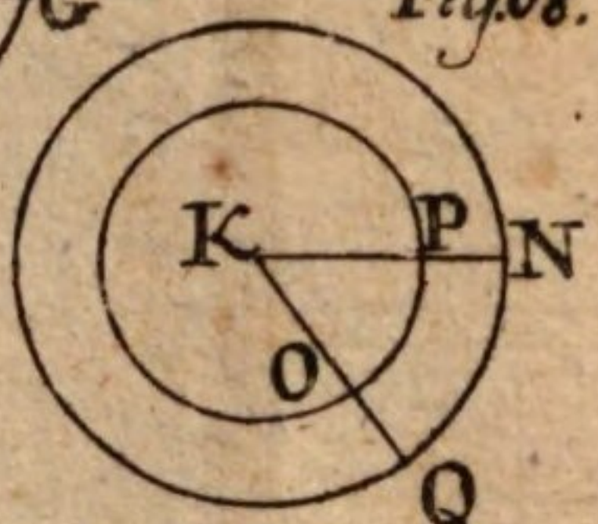


Fig. 65

Fig. 68.



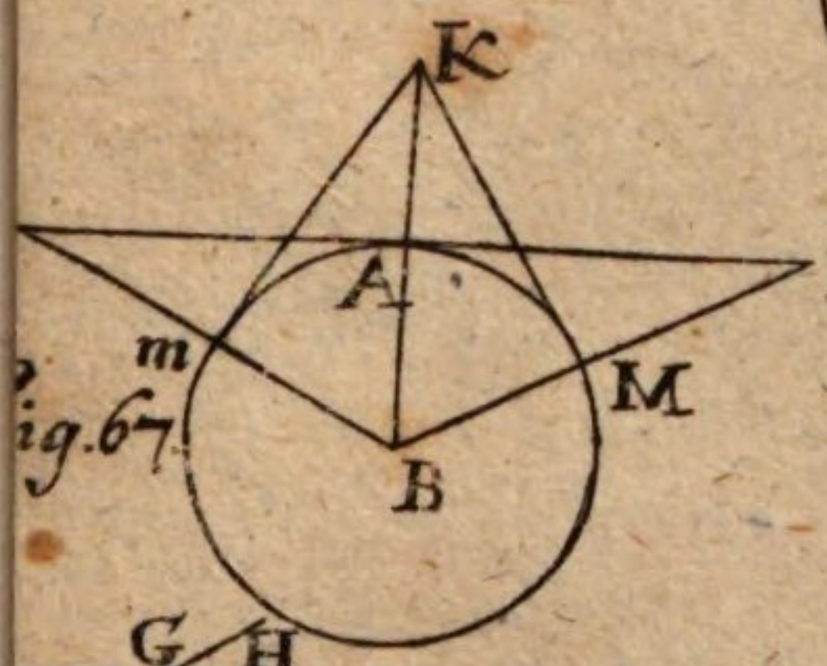
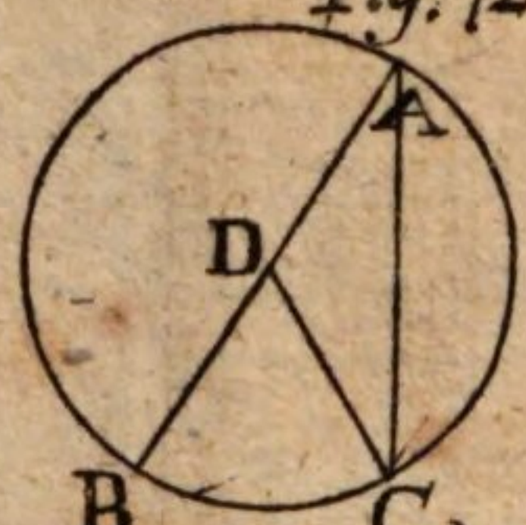


Fig. 67.

Fig. 72.



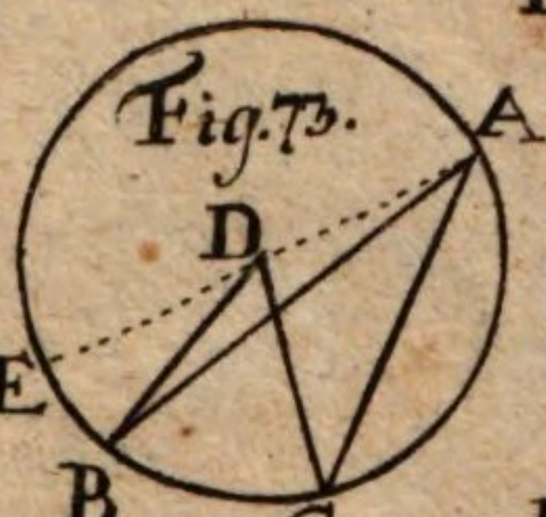


Fig. 73.

Fig. 74.

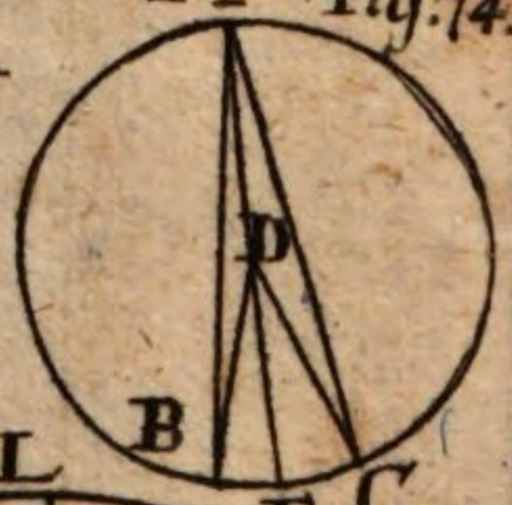
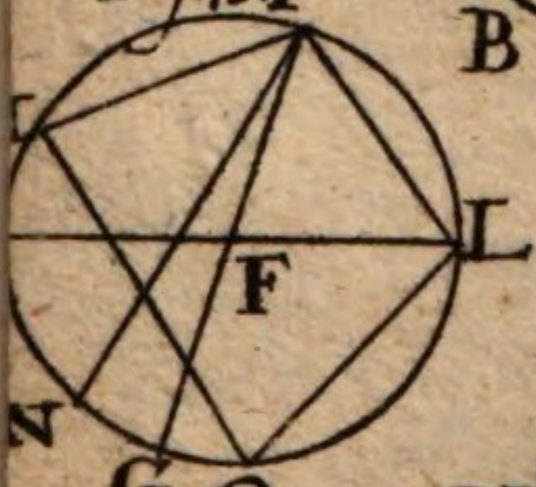


Fig. 75. P



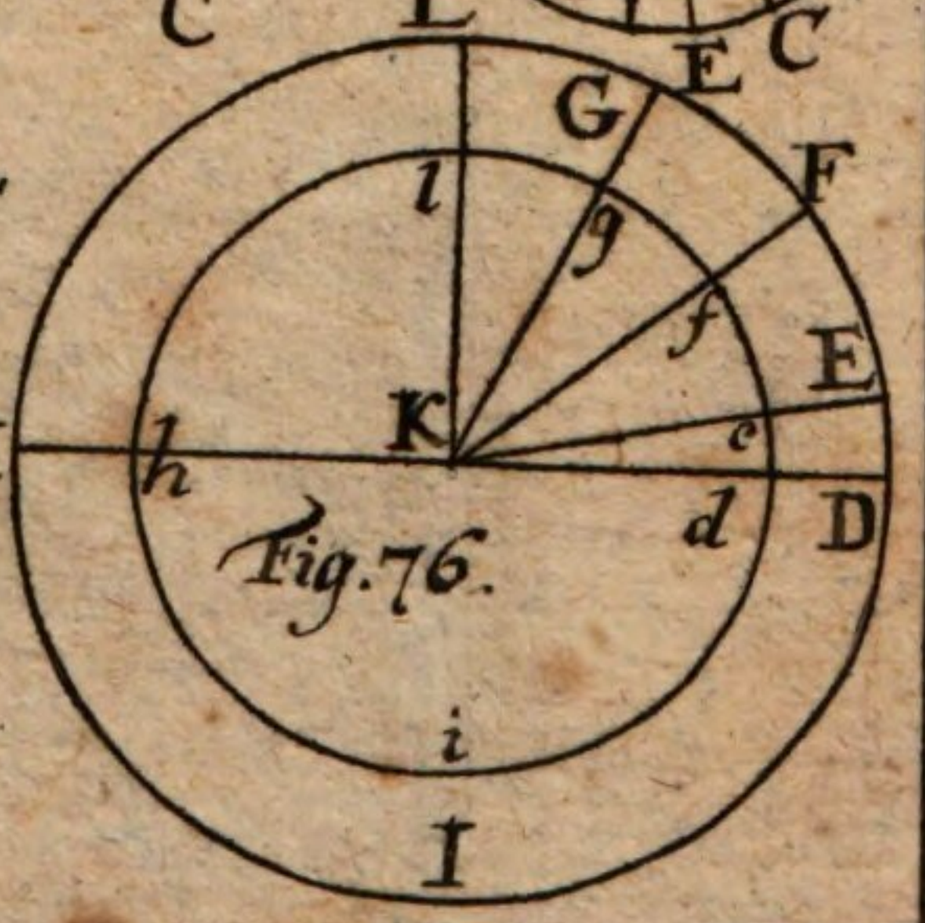
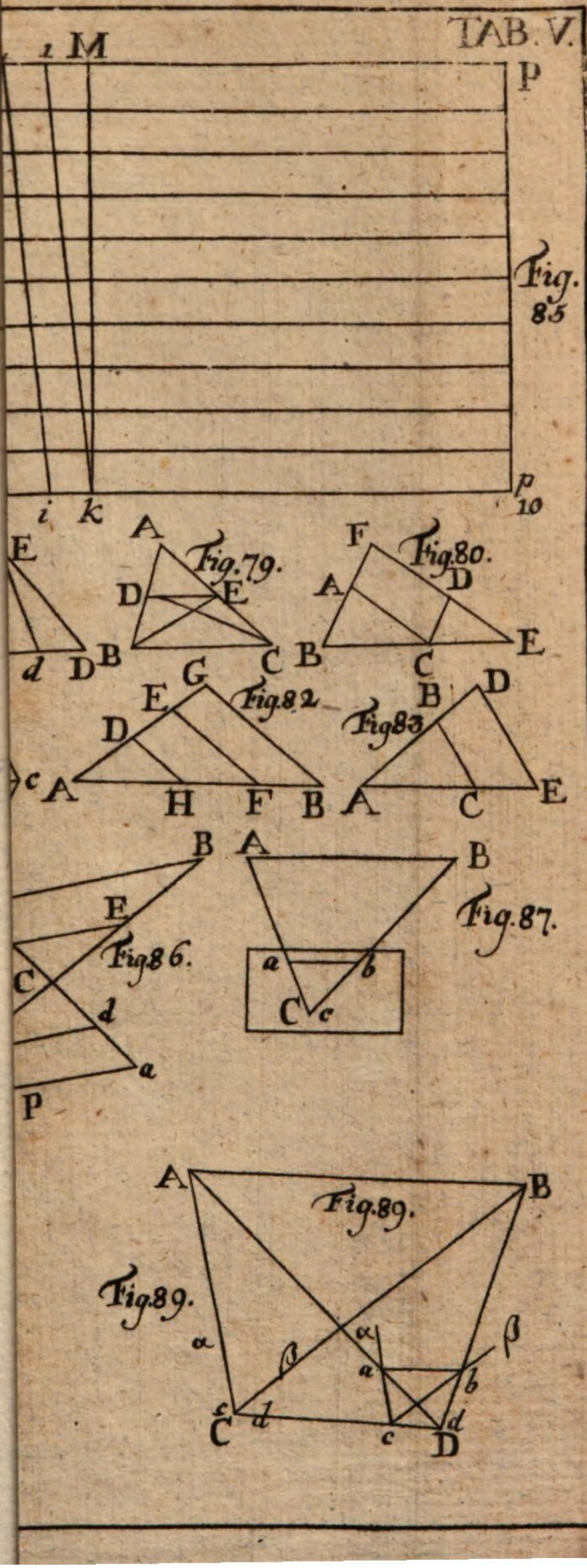


Fig. 76.

Fig. 77. *

TAB. V.


M
P
p
i
k
10
Fig. 85
A
E
D
B
C
d
Fig. 79.
F
Fig. 80.
G
Fig. 82
Fig. 83
c
H
Fig. 86.
a
b
Fig. 87.
Fig. 89.
α
β
ε

TAB. VI.

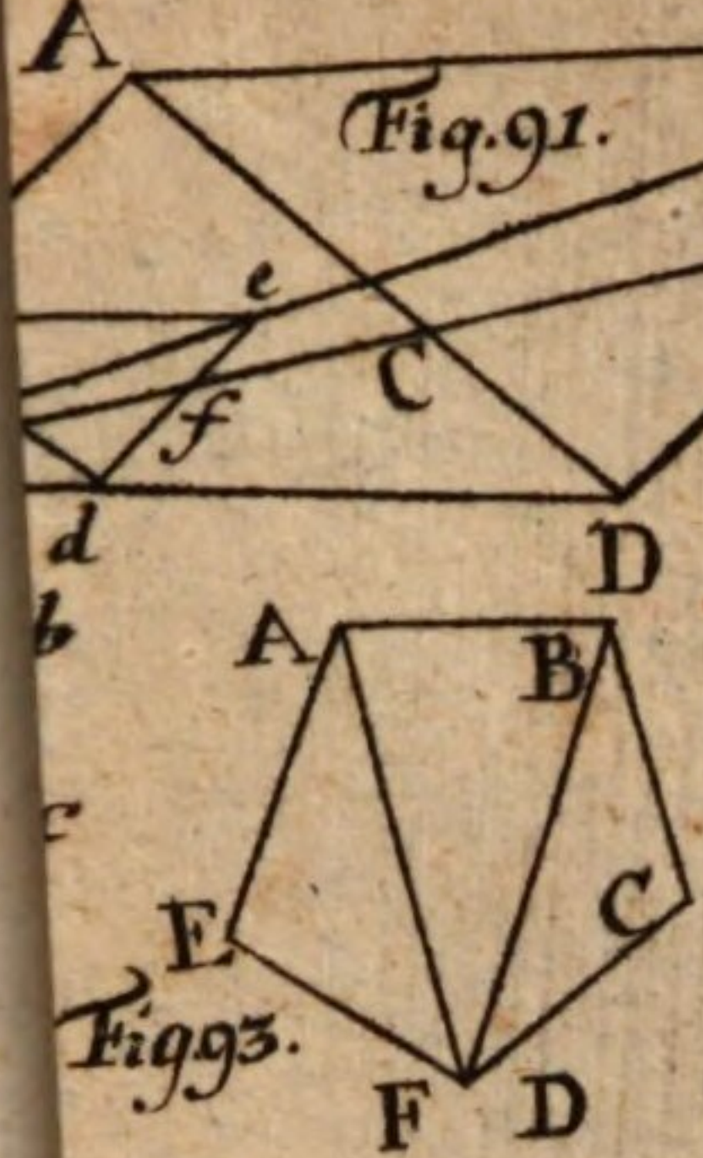


Fig. 91.

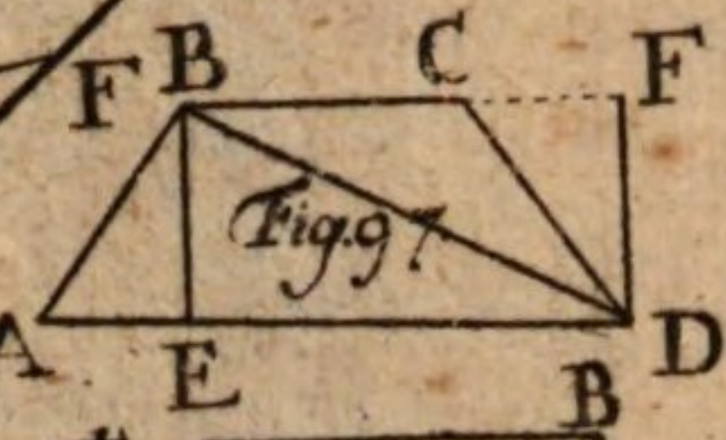
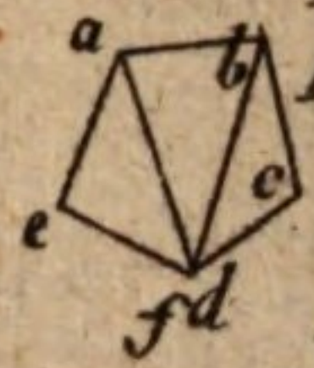


Fig. 97.

Fig. 93.



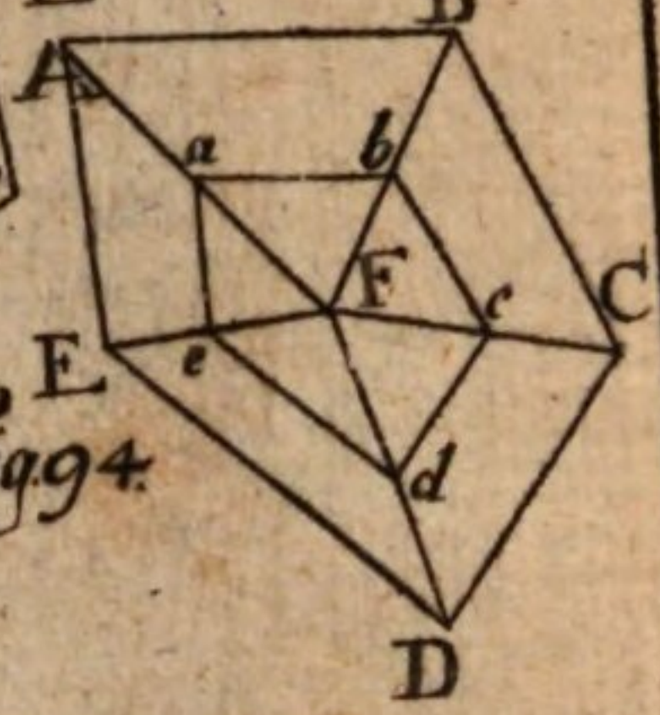
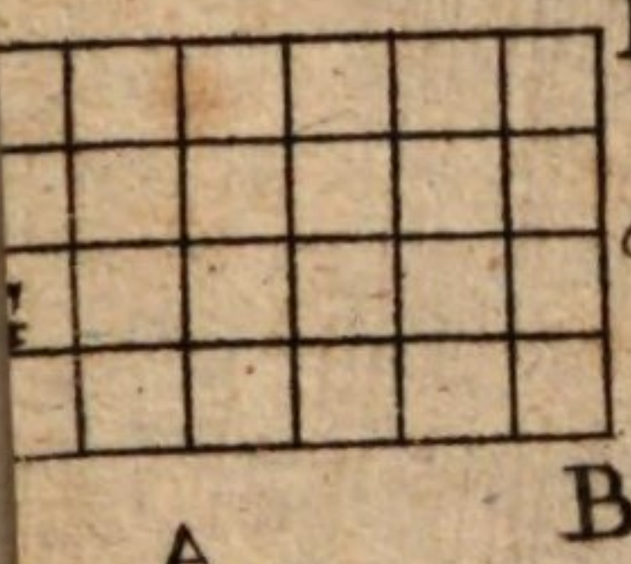


Fig. 94.



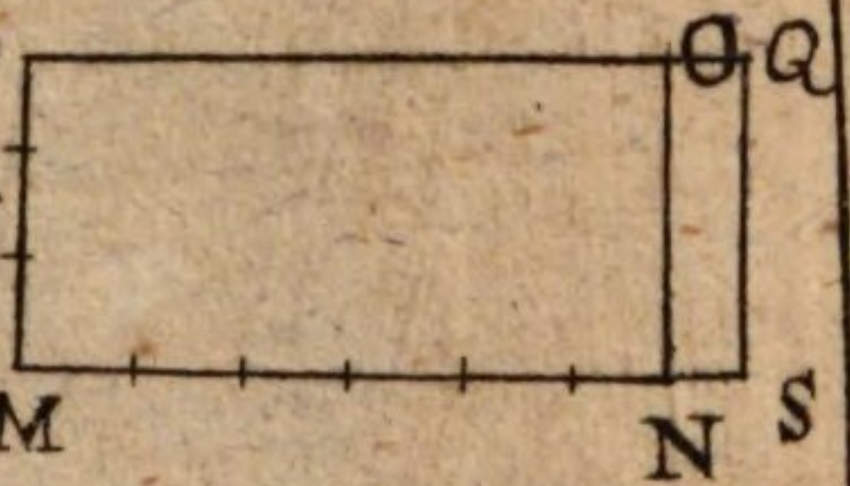


Fig. 96.

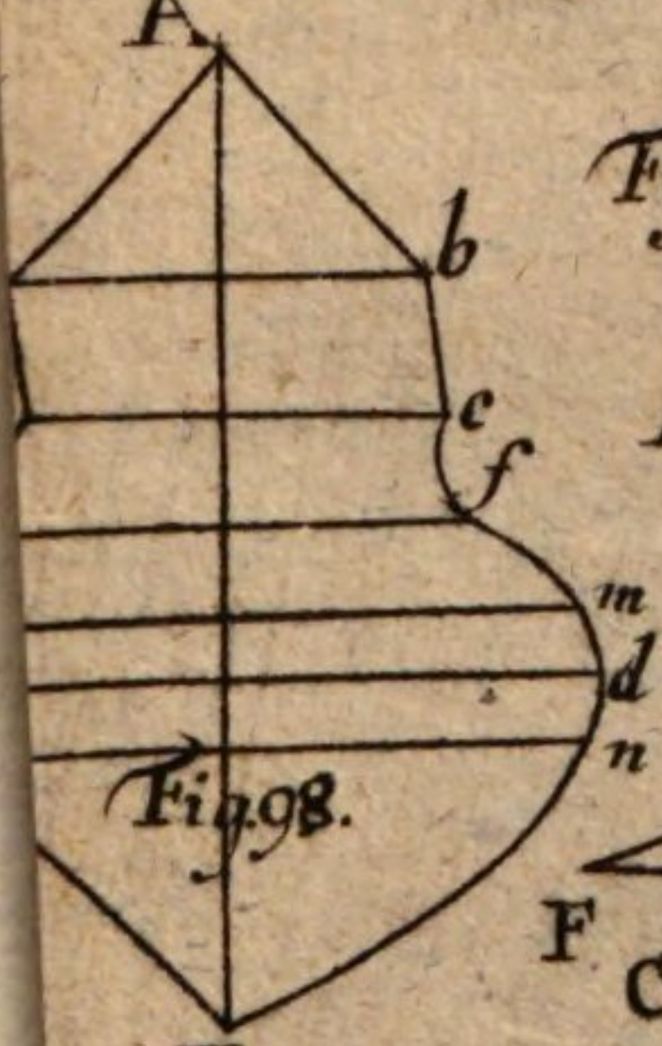


Fig. 98.

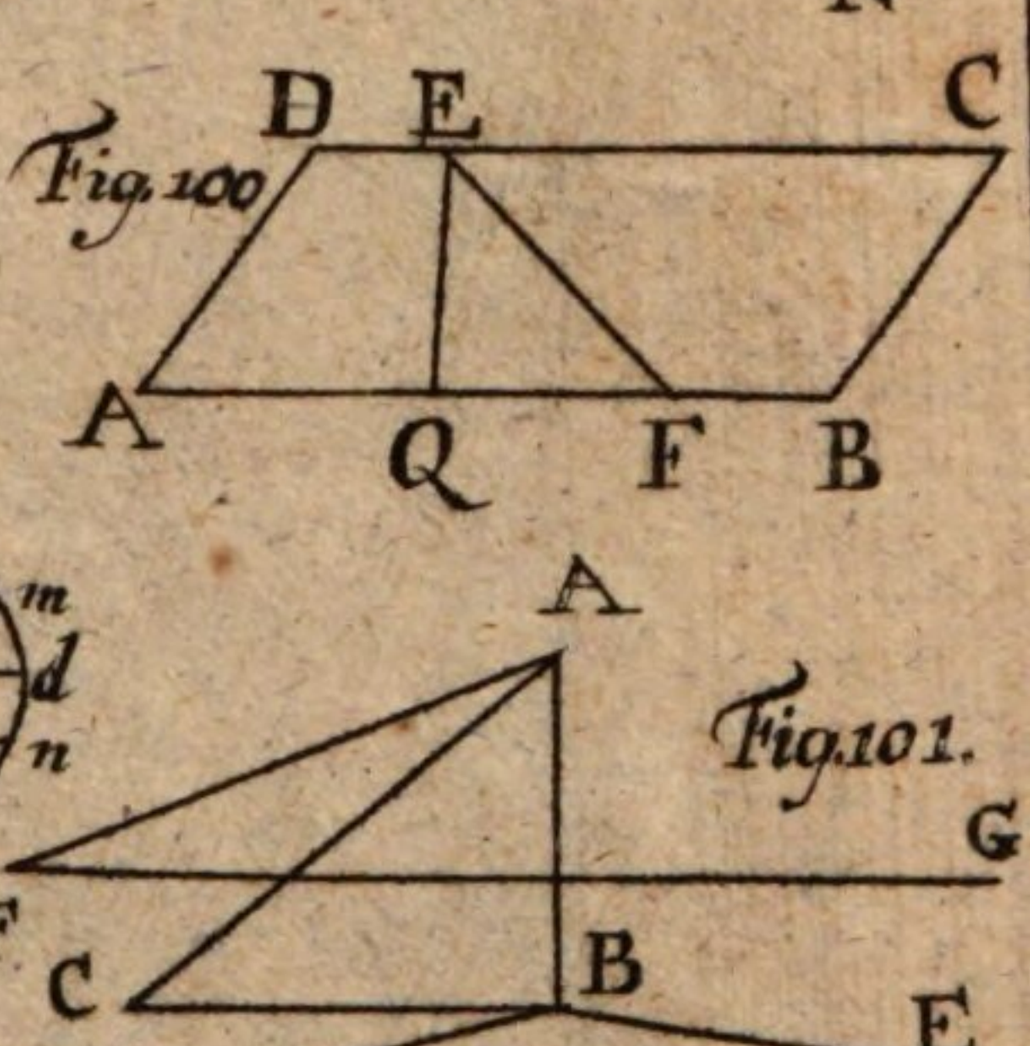


Fig. 100

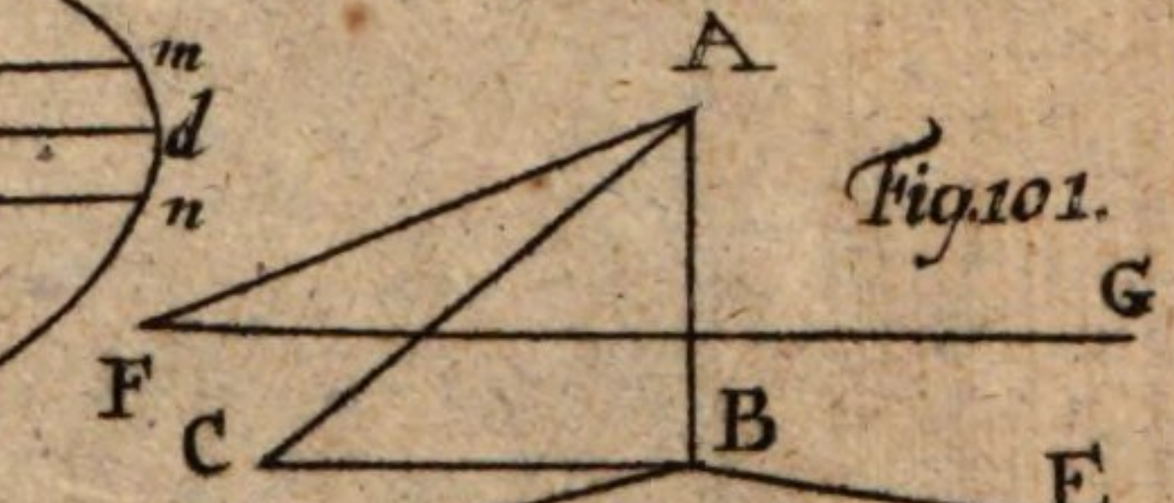


Fig. 101.

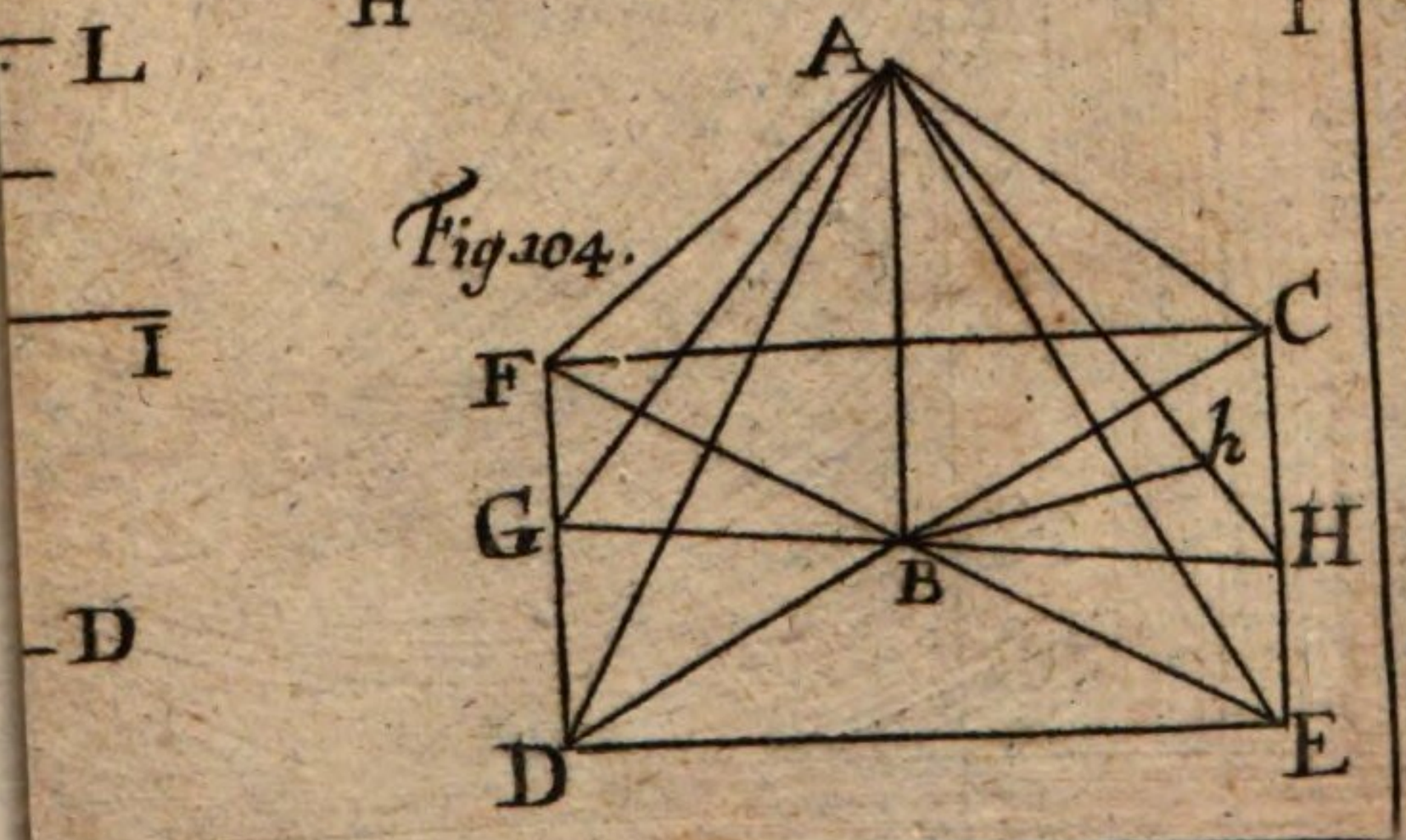


Fig. 104.

TAB. VII.

Fig. 106.

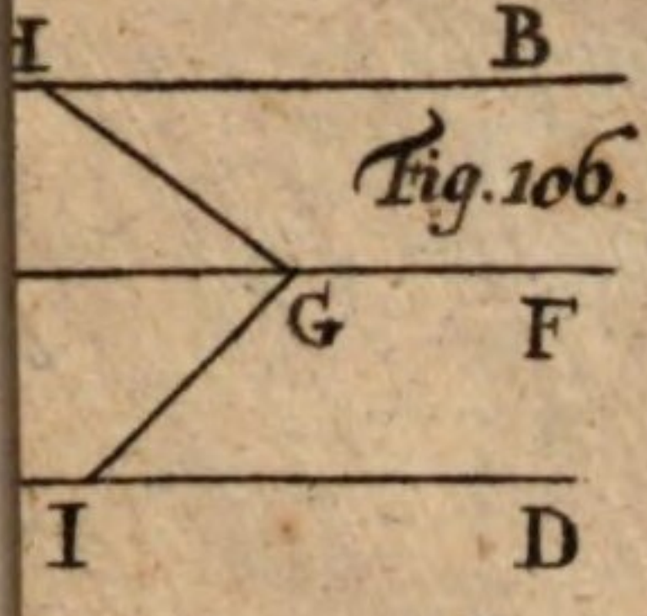


Fig. 107

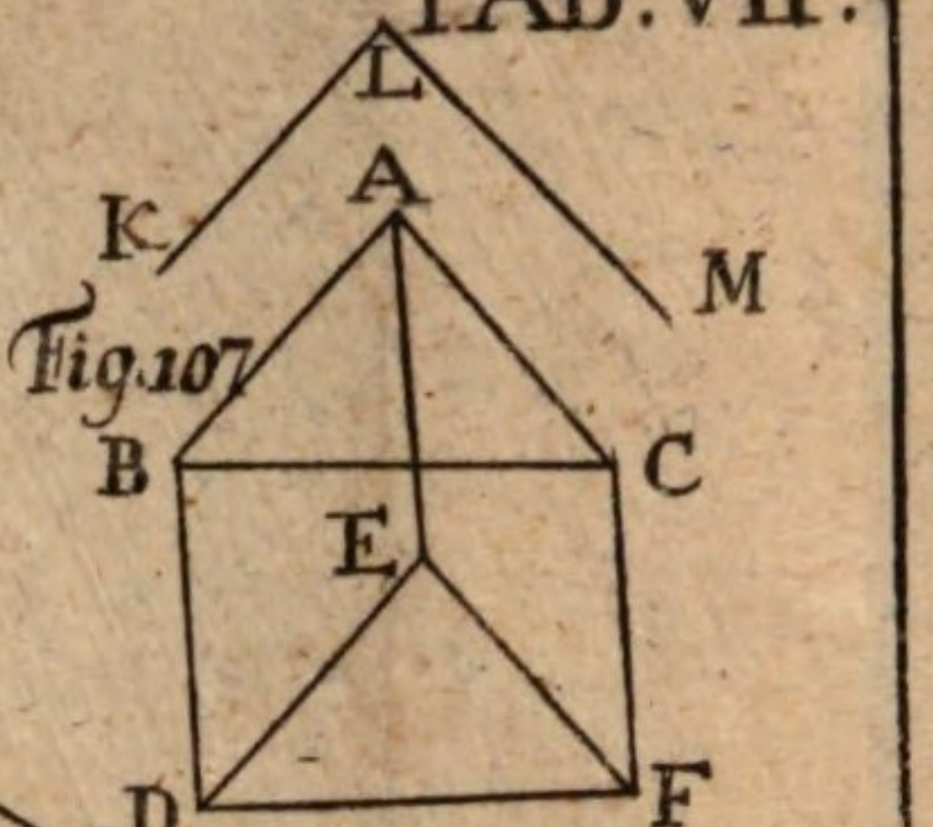


Fig. 109.

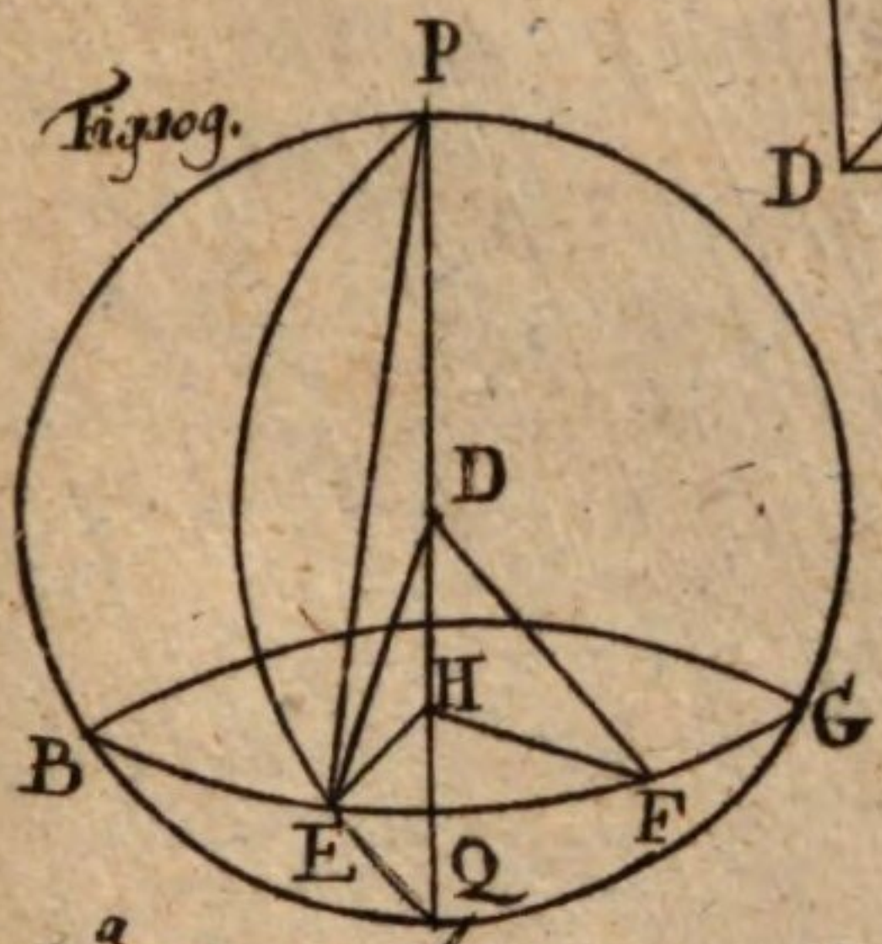


Fig. 110.

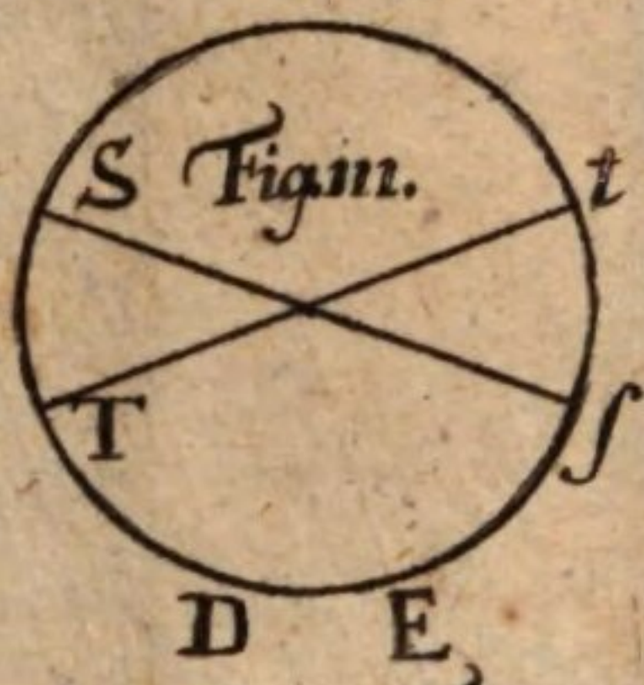


Fig. 112.

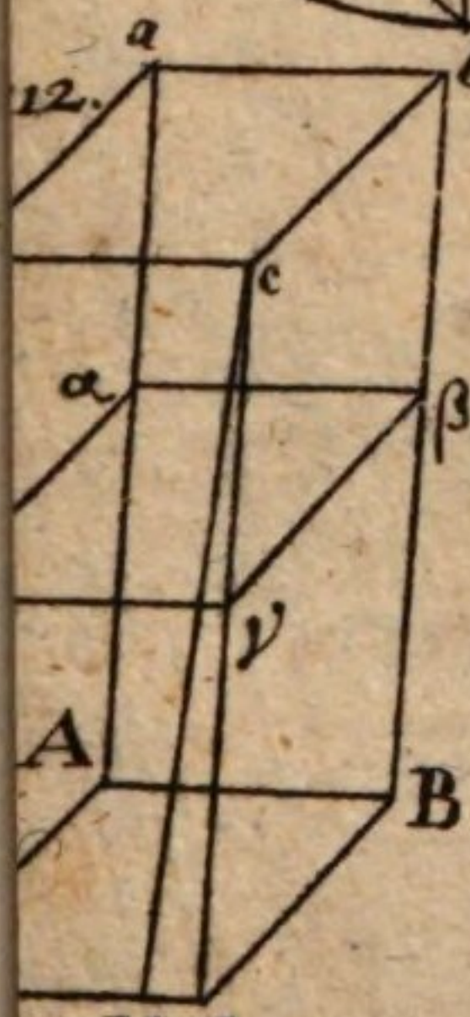


Fig. 113

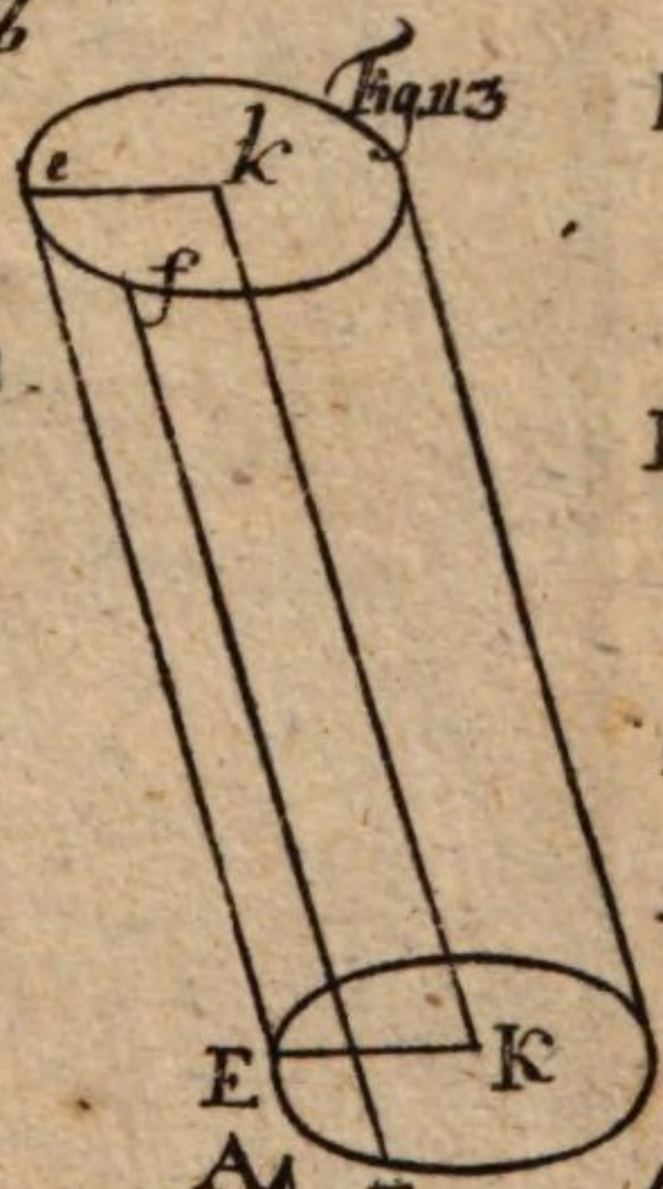


Fig. 120.

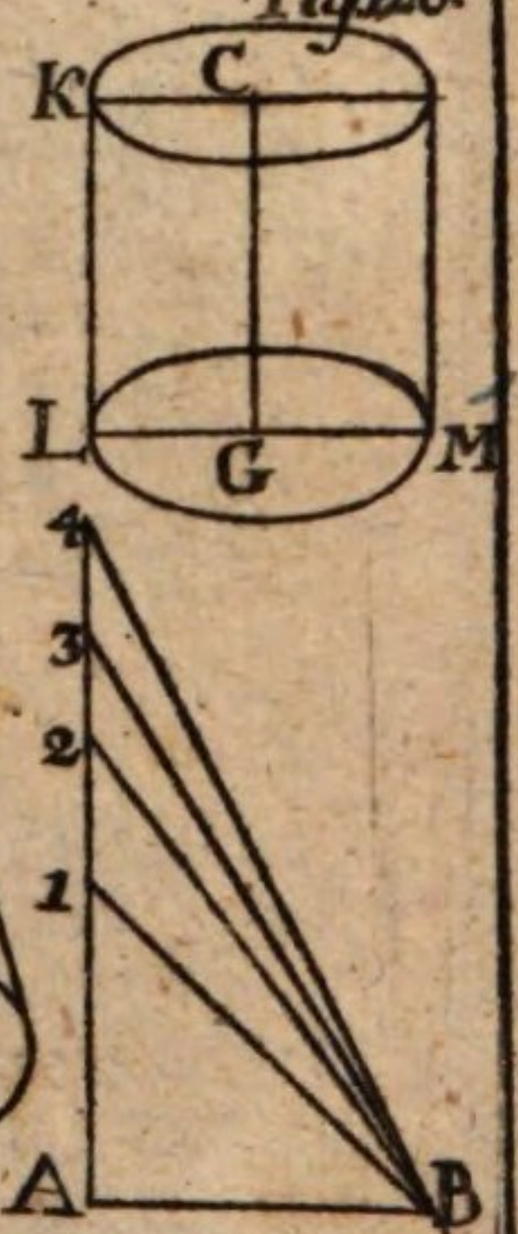
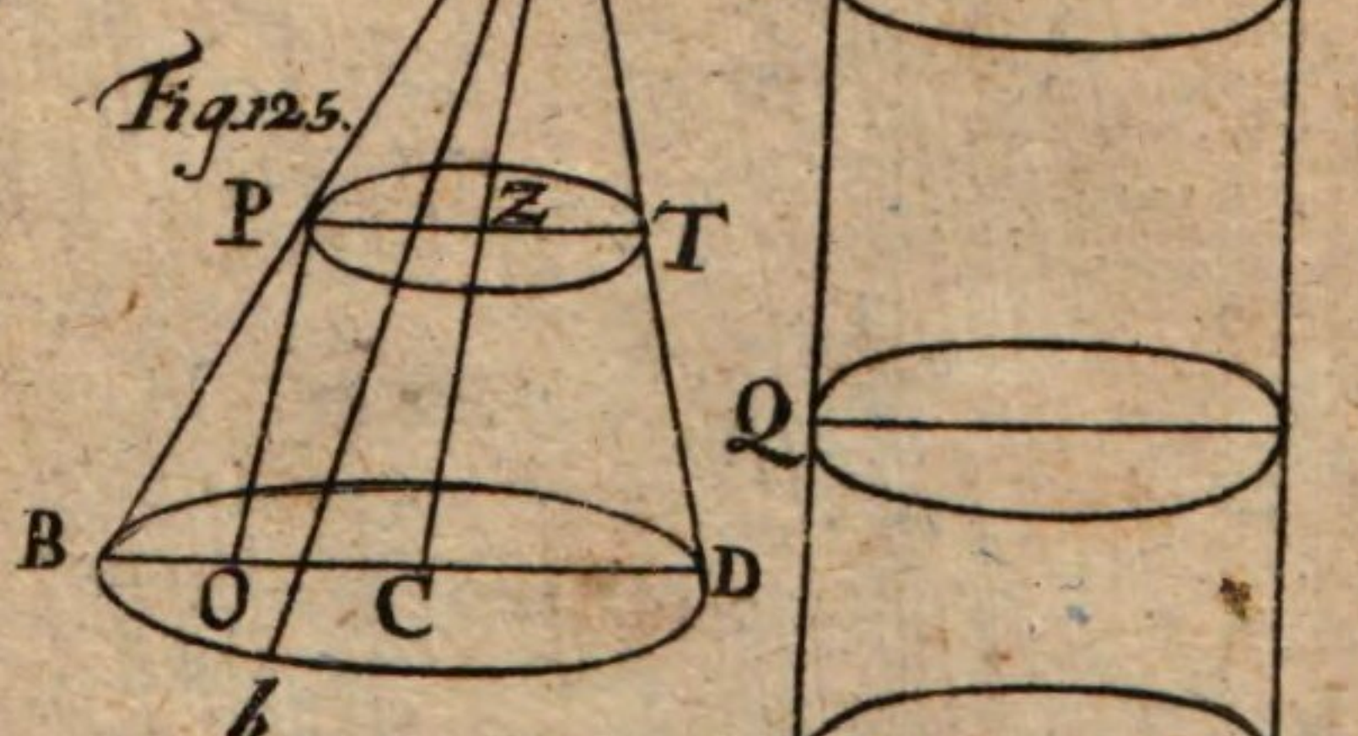
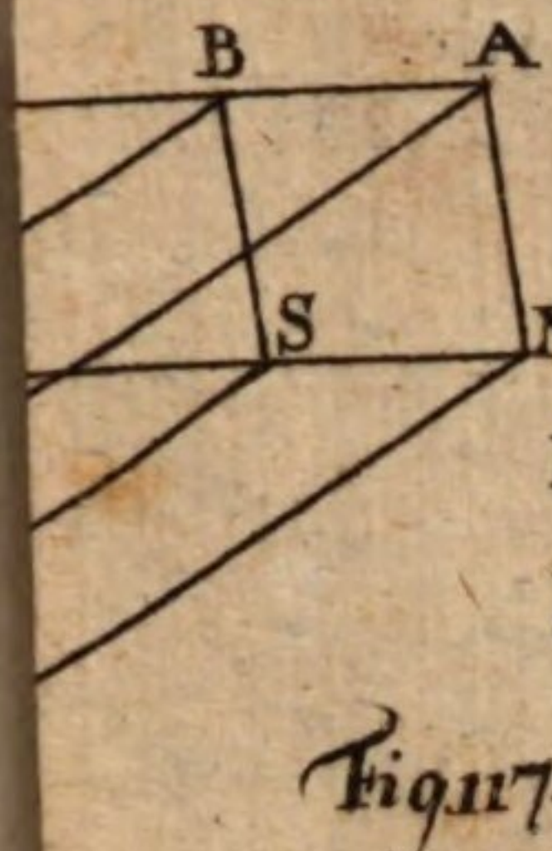
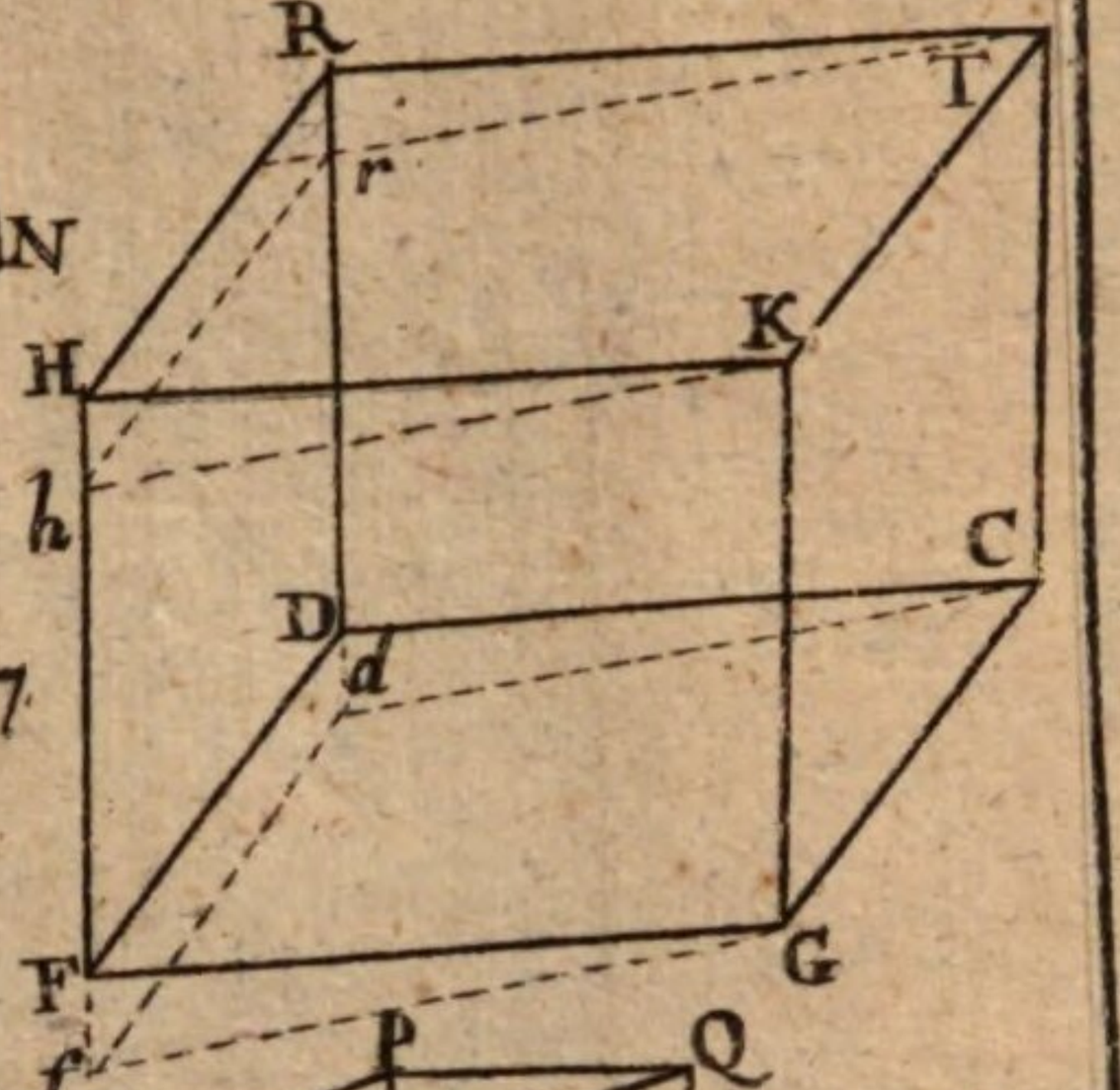


Fig. 125.

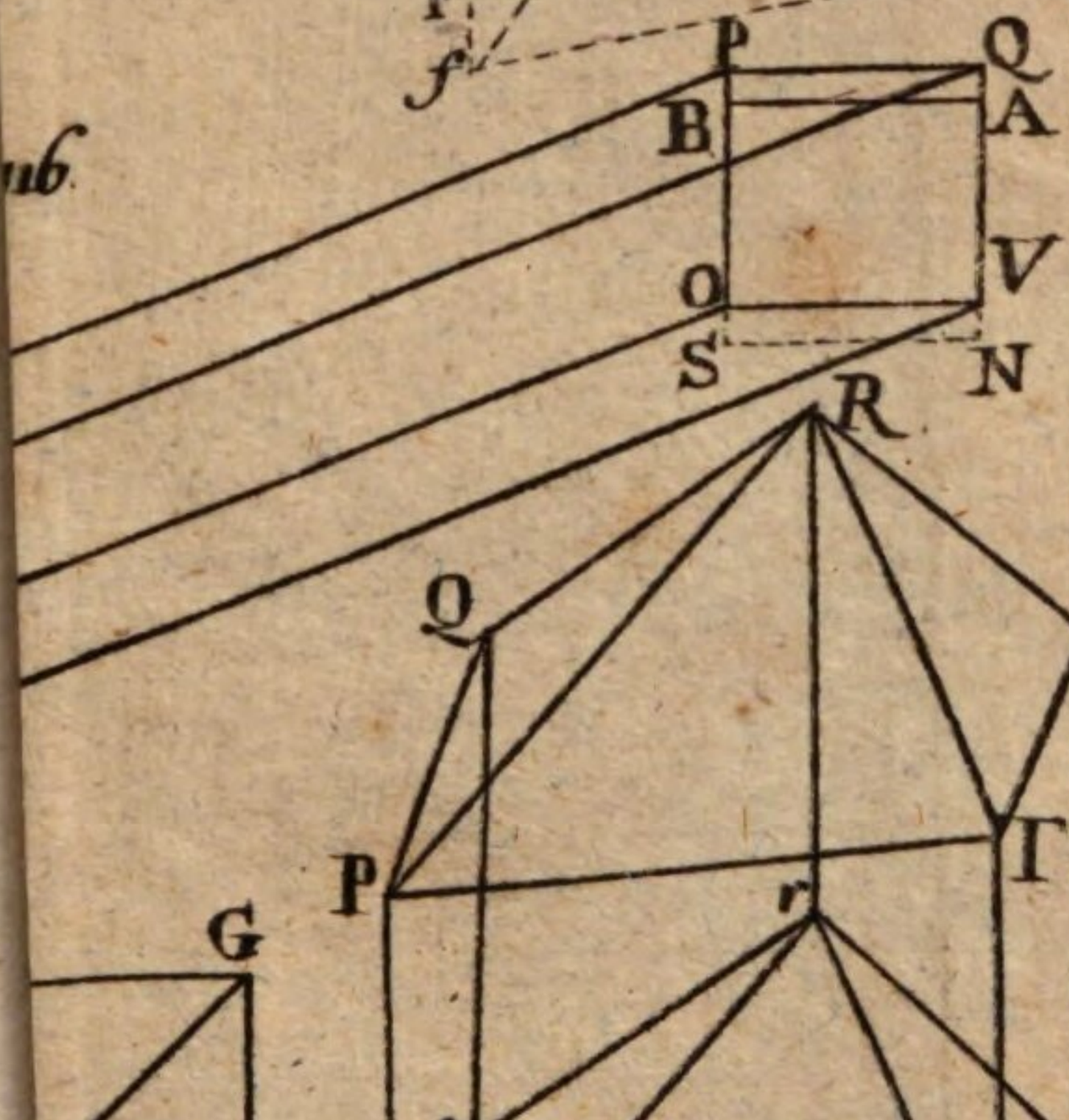




Figur 7.



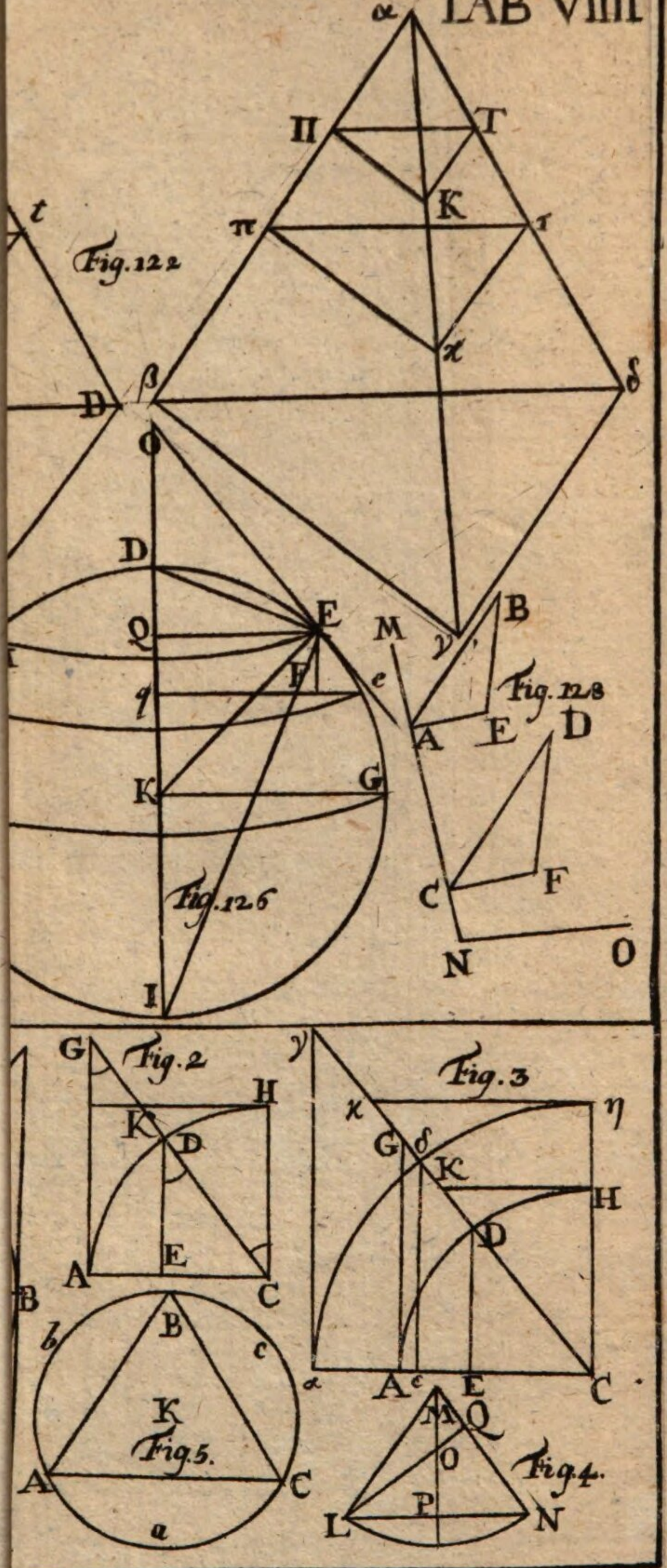
ur 6.



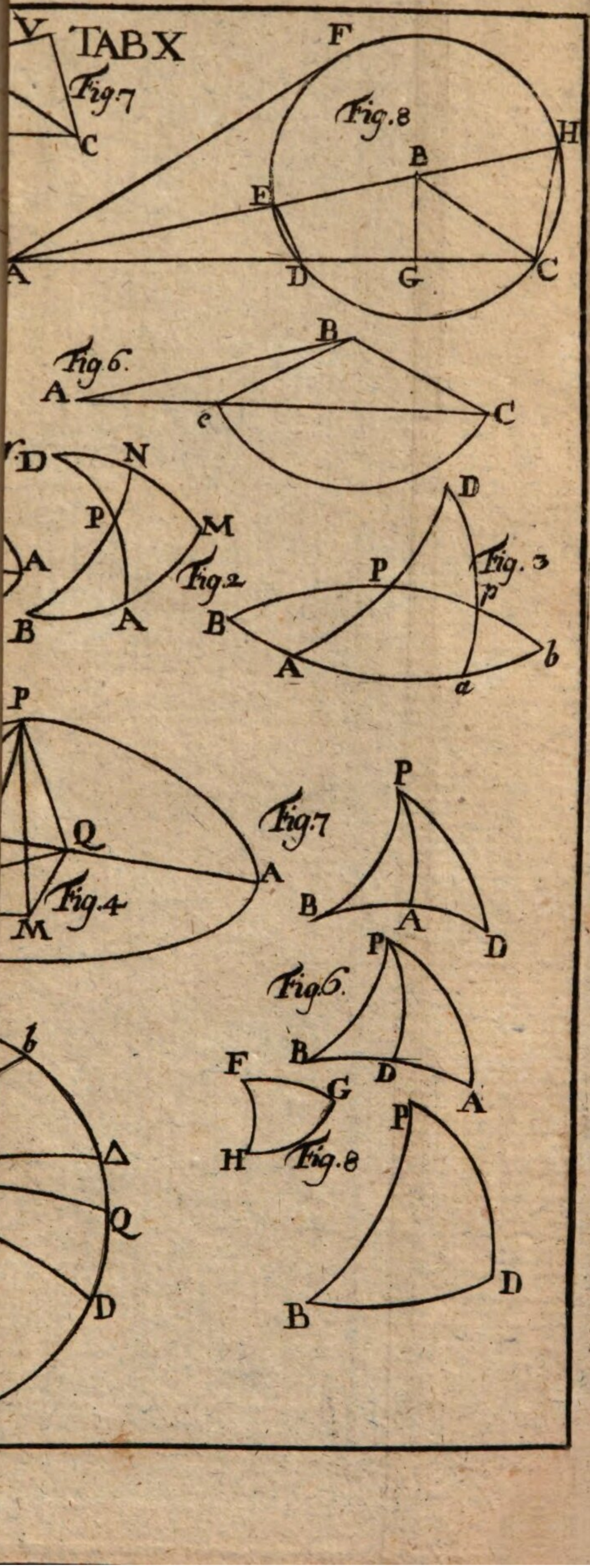
Figur 9.

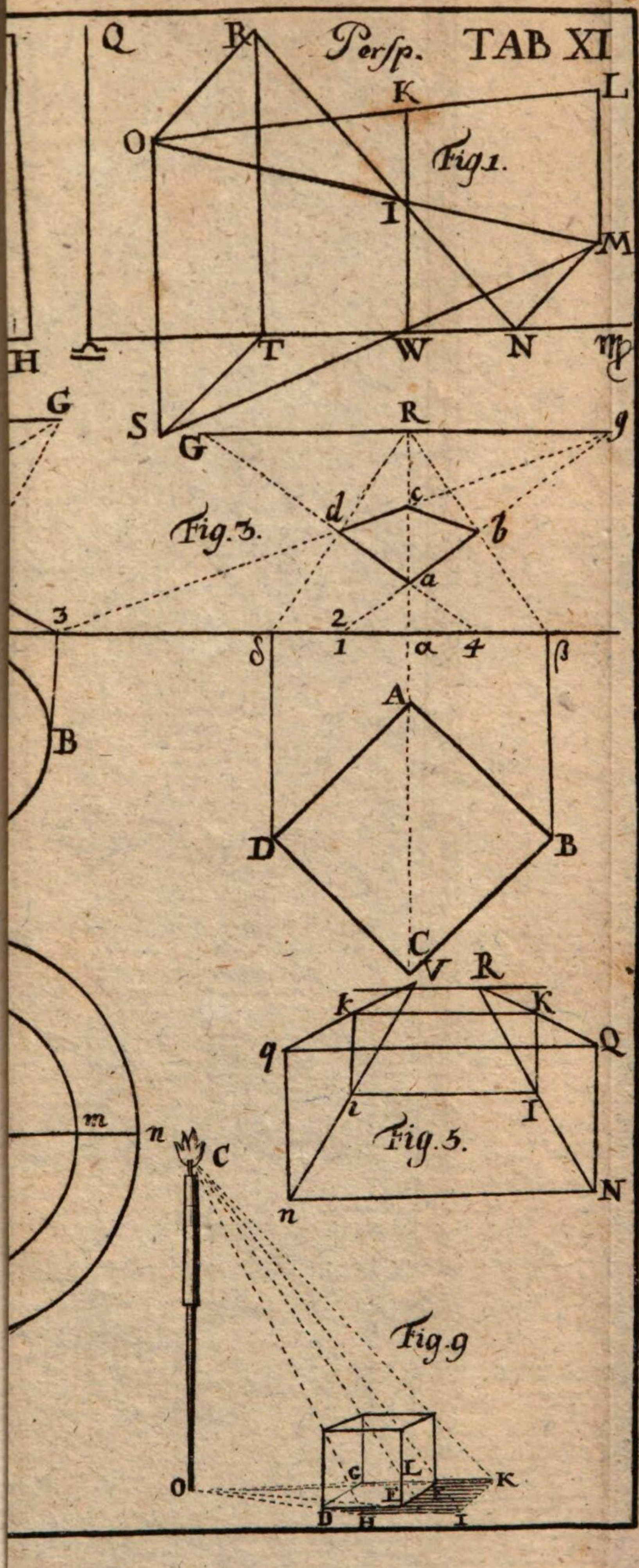
Figur 3

TAB VIIII

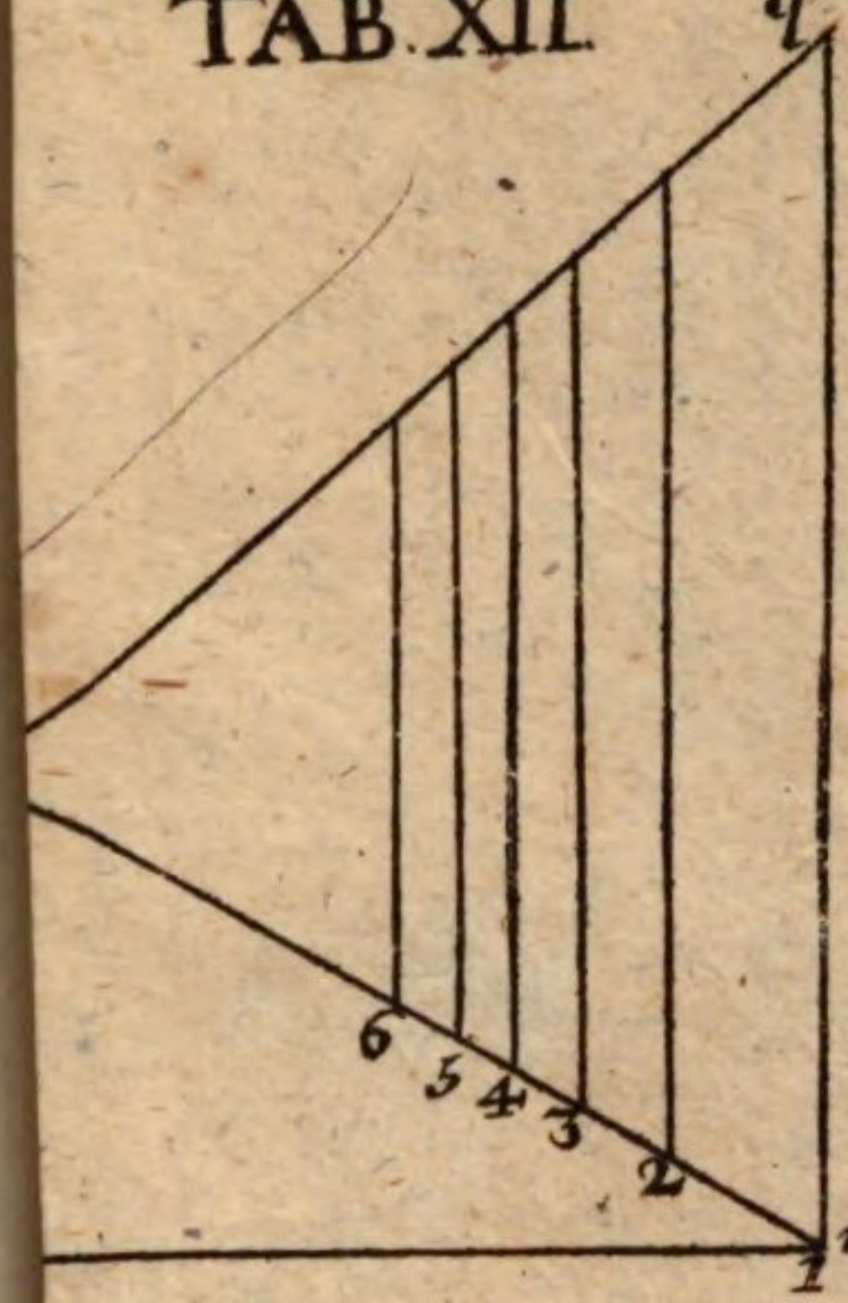

α
Π
T
K
π
τ
t
Fig. 122
χ
β
B
δ
Φ
D
E
Q
M
B
F
e
q
A
E
D
K
G
Fig. 126
Fig. 128
C
F
N
O
I
G
Fig. 2
H
K
D
E
A
C
B
b
B
c
K
Fig. 5.
A
C
a
y
Fig. 3
κ
η
G
δ
K
H
D
A
E
C
M
Q
O
Fig. 4.
P
L
N

TAB X


V
C
Fig. 7
F
H
B
E
A
D
G
C
Fig. 8
B
A
C
Fig. 6.
B
N
D
P
M
A
B
A
Fig. 2
D
P
Fig. 3
p
B
A
b
a
P
Q
A
M
Fig. 4
P
B
A
D
Fig. 7
P
B
D
Fig. 6.
b
Δ
Q
D
F
G
H
Fig. 8
P
B
D
A
P
B
D


Q
B
K
L
O
I
M
H
T
W
N
G
S
R
g
G
Fig. 1.
d
c
b
a
3
2
δ
1
α
4
β
Fig. 3.
A
B
D
B
C
V
R
K
K
q
Q
i
I
n
N
m
n
C
Fig. 5.
Fig. 9
O
C
L
K
D
H
I

TAB. XII.



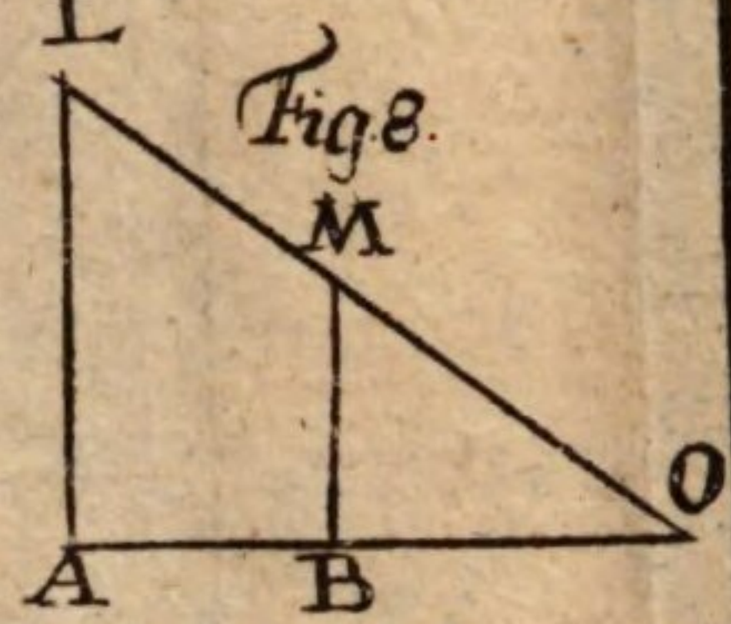


Fig. 8.

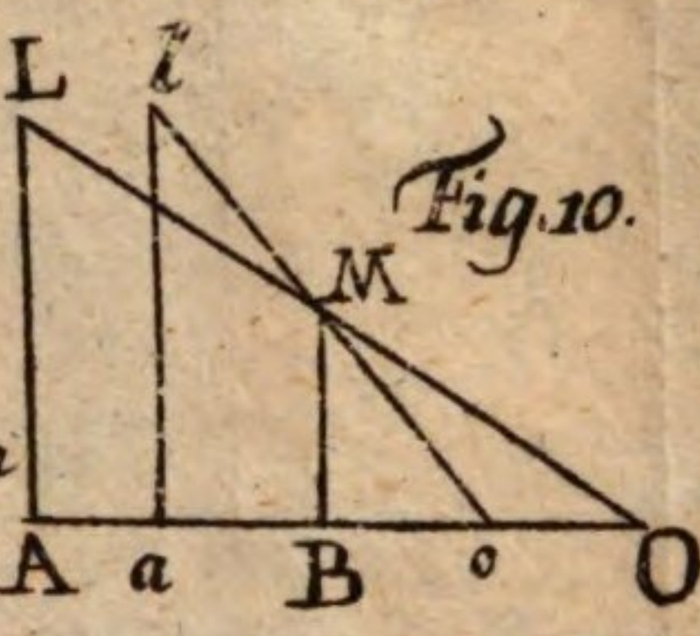
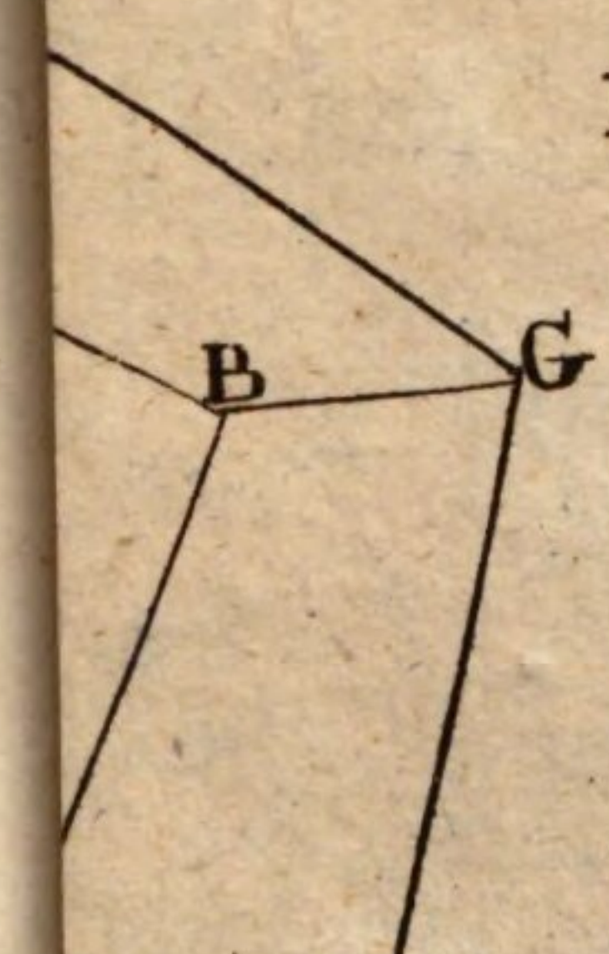


Fig. 10.



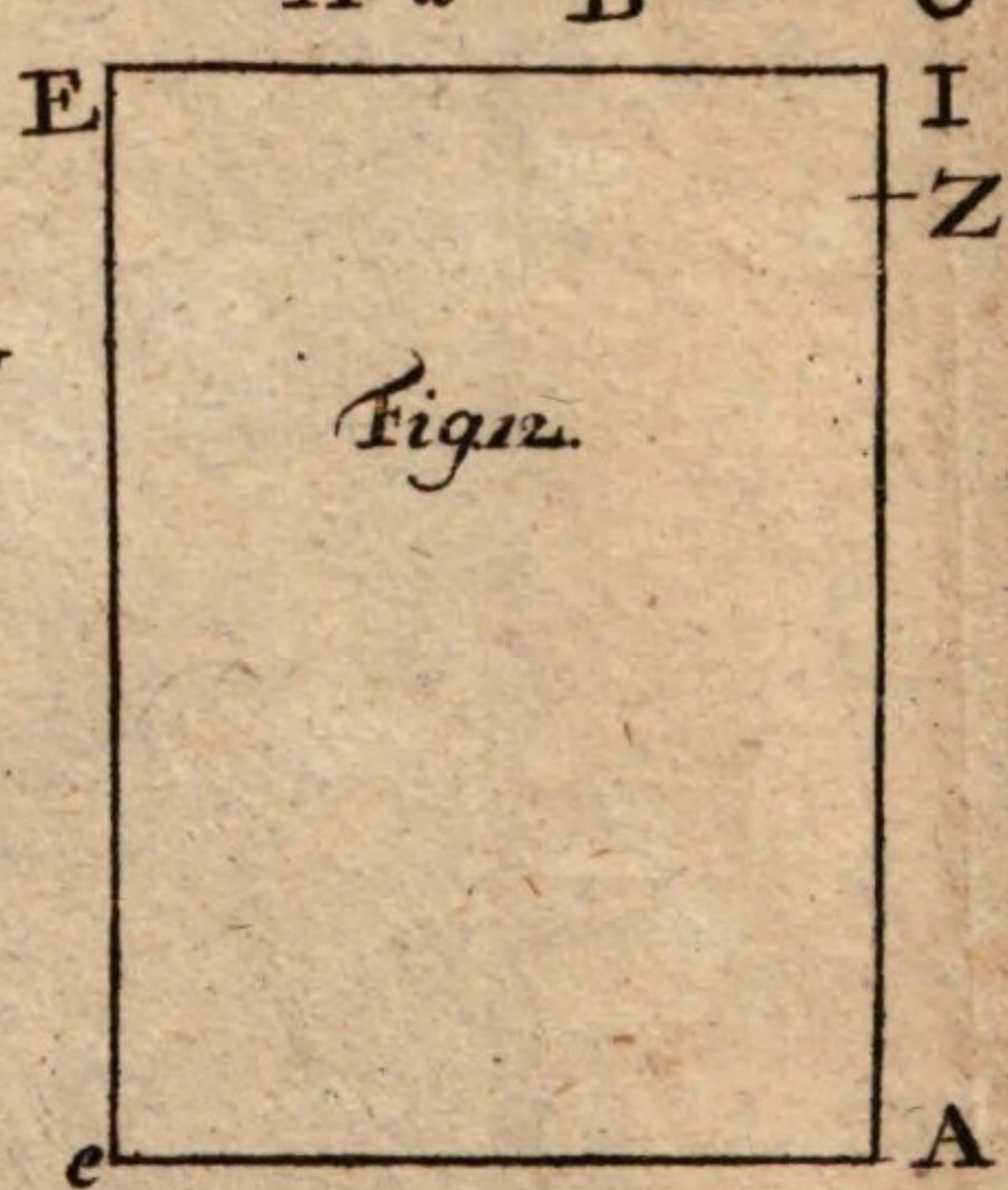


Fig. 12.

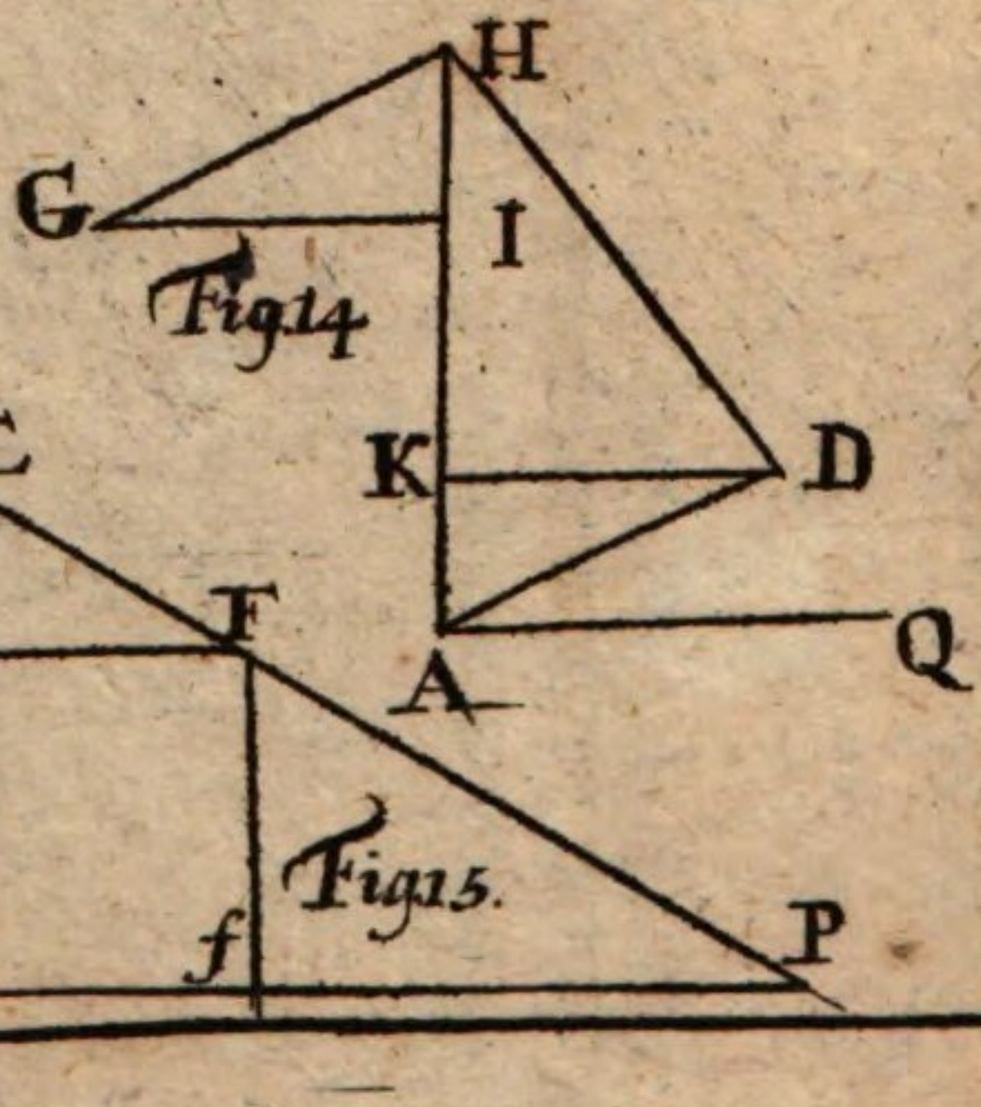


Fig. 14

Fig. 15.

2

f. Matt

Kärntner

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kästner, Abraham Gotthelf,

Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

Goettingen 1764

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 386
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267516-1
VD18 11180323-005